Extrempunkte

Hochpunkt

Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung: $f''(x_0) < 0$ **oder**

Vorzeichenwechsel von f'**,von Plus nach Minus, an der Stelle** x_0**.**

Tiefpunkt

Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung: $f''(x_0) > 0$ **oder**

Vorzeichenwechsel von f'**,von Minus nach Plus, an der Stelle** x_0**.**

<u>Aufgabe 1</u>

Gegeben sei die Funktion *f* durch $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$**.**

Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion *f*.

<u>Lösung:</u>

Es gilt: $f'(x) = 4x^3 - 20x$ und $f''(x) = 12x^2 - 20$.

<u>Notwendige Bedingung:</u>

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x^2 - 20) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ } oder \text{ } 4x^2 - 20 = 0$

$x_1 = 0$;

$4x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{5}; \quad x_3 = \sqrt{5}$;

<u>Hinreichende Bedingung:</u>

$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 20 = -20 < 0$; $f(0) = 0^4 - 10 \cdot 0^2 + 9 = 9 \Rightarrow H(0|0)$.

$f''(\pm\sqrt{5}) = 12 \cdot (\pm\sqrt{5})^2 - 20 = 12 \cdot 5 - 20 = 40 > 0$;

$f(\pm\sqrt{5}) = (\pm\sqrt{5})^4 - 10 \cdot (\pm\sqrt{5})^2 + 9 = 25 - 10 \cdot 5 + 9 = -16$

.

$\Rightarrow T_1(-\sqrt{5}|-16) und \, T_2(\sqrt{5}|-16)$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}; \quad x \neq 0$**. Ihr Schaubild sei *K*.**

Zeigen Sie, dass *K* einen Extrempunkt hat.

Lösung:

Ableitung:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Notwendige Bedingung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechsel von f'):

$$f'(-1) = (2 \cdot (-1) - 1) \cdot e^{\frac{1}{-1}} = -3 \cdot e^{-1} = -\frac{3}{e} < 0;$$

$$f'(0.25) = (2 \cdot 0.25 - 1) \cdot e^{\frac{1}{0.25}} = -0.5 \cdot e^4 < 0;$$

$$f'(1) = (2 \cdot 1 - 1) \cdot e^{\frac{1}{1}} = e > 0.$$

x	$-\infty$ 0 $\frac{1}{2}$ ∞
$f'(x)$	$- - - - - - - - 0 + + + + + + + + +$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^2 = \frac{e^2}{4} \quad \Rightarrow T\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{e^2}{4}\right)$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x) = \cos(x) - x$**.**

Zeigen Sie, dass *f* einen Tiefpunkt im Intervall (0; 2π) besitzt.

Lösung:

Ableitung:

$f'(x) = -\sin(x) - 1$

Notwendige Bedingung:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow -\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = -1$

$\Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2}$**.**

Hinreichende Bedingung(Vorzeichenwechsel-Kriterium):

x	**0** $\frac{3\pi}{2}$ **2π**
$f'(x)$	**− − − − − − − − − − − 0 + + + + + + + + + + + + + +**

Es liegt einen Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus von f' **an der Stelle** $x = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \underline{T\left(\frac{3\pi}{2} \middle| -\frac{3\pi}{2}\right)}$**.**

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (2x-1)\cdot e^x$ **.**

Bestimmen Sie Extrempunkte von f.

Lösung:

$f(x) = (2x-1)\cdot e^x$

Ableitungen:

$f'(x) = 2\cdot e^x + (2x-1)\cdot e^x = (2+2x-1)\cdot e^x = (2x+1)\cdot e^x$ **.**

$f''(x) = 2\cdot e^x + (2x+1)\cdot e^x = (2+2x+1)\cdot e^x = (2x+3)\cdot e^x$ **.**

Notwendige Bedingung:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+1)\cdot e^x = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ **.**

Hinreichende Bedingung:

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} > 0$

Es gibt ein Tiefpunkt.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0\cdot e^{-\frac{1}{2}} = 0$

$\Rightarrow \underline{T\left(-\frac{1}{2} \mid 0\right)}$ **.**