Gerade und ungerade Funktionen. Symmetrie

Das Schaubild einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt. Die Funktion f ist dann eine gerade Funktion.

Das Schaubild einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt. Die Funktion f ist dann eine ungerade Funktion.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie den Graph der Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$ auf Symmetrie.

Lösung:

Die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$ ist eine ganzrationale Funktion.

Sie hat gerade und ungerade Hochzahlen und besitzt daher weder eine Symmetrie zum Ursprung noch eine Symmetrie zur y-Achse.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie den Graph der Funktion f mit auf Symmetrie.

a) $f(x) = 2\sin(x)$; **b)** $f(x) = x \cdot \sin(x)$

Lösung:

a) Es gilt: $f(-x) = 2\sin(-x) = 2 \cdot (-\sin(x)) = -2\sin(x) = -f(x)$.
Die Funktion f ist also eine ungerade Funktion und ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Es gilt: $f(-x) = -x \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x)$.
Die Funktion f ist also eine gerade Funktion und ihr Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{3}{1+x^2}+2$.

Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Symmetrie.

Lösung:

Es gilt: $f(-x)=\frac{3}{1+(-x)^2}+2=\frac{3}{1+x^2}+2=f(x)$.

Das Schaubild von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^4+2x^2+7}{x^3-3x}$.

Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Symmetrie.

Lösung:

Es gilt:

$$f(-x)=\frac{(-x)^4+2(-x)^2+7}{(-x)^3-3(-x)}=\frac{x^4+2x^2+7}{-x^3+3x}=\frac{x^4+2x^2+7}{-(x^3-3x)}$$

$$=-\frac{x^4+2x^2+7}{x^3-3x}=-f(x).$$

Das Schaubild von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\sqrt{1+2x+x^4}-\sqrt{1-2x+x^4}$.

Untersuchen Sie ob f eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

Lösung:

$$f(x)=\sqrt{1+2(-x)+(-x)^4}-\sqrt{1-2(-x)+(-x)^4}=\sqrt{1-2x+x^4}-\sqrt{1+2x+x^4}$$

$$=-\left(\sqrt{1+2x+x^4}-\sqrt{1-2x+x^4}\right)=-f(x).$$

Die Funktion f ist also eine ungerade Funktion.

Aufgabe 6

Die Höhe eines Seils über dem Boden das zwischen zwei vertikalen Masten hängt ist durch das Schaubild der Funktion $f_a(x)$ **mit** $f_a(x) = 50 \cdot \left(e^{ax} + e^{-ax}\right) - 70;\ a > 0$ **gegeben.**

Zeigen Sie, dass das Seil symmetrisch zur y-Achse ist.

Lösung:

Es gilt:

$$f_a(-x) = 50 \cdot \left(e^{a\cdot(-x)} + e^{-a\cdot(-x)}\right) - 70 = 50 \cdot \left(e^{-a\cdot x} + e^{a\cdot x}\right) - 70$$

$$= 50 \cdot \left(e^{a\cdot x} + e^{-a\cdot x}\right) - 70 = f(x).$$

Das Seil ist also symmetrisch zur y-Achse.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion f **mit** $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$**.**

Untersuchen Sie das Schaubild von f **auf Symmetrie.**

Lösung:

Es gilt:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(1+x\right) - \ln(1-x)$$

$$= -\left(\ln(1-x) - \ln(1+x)\right) = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x).$$

Das Schaubild von f **ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.**

Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\frac{\cos(x)}{x}$**.**

Untersuchen Sie ob *f* eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

Lösung:

Es gilt:

$$f(-x)=\frac{\cos(-x)}{-x}=\frac{\cos(x)}{-x}=-\frac{\cos(x)}{x}=-f(x).$$

Die Funktion *f* ist also eine ungerade Funktion.

Aufgabe 9

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\sin^2(x)-2\cdot\cos(x)$**.**

Untersuchen Sie ob *f* eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

Lösung:

Es gilt:

$$f(-x)=\sin^2(-x)-2\cdot\cos(-x)=(-\sin(x))^2-2\cdot\cos(x)=\sin^2(x)-2\cdot\cos(x)=f(x).$$

Die Funktion *f* ist also eine gerade Funktion.

Aufgabe 10

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\sin(x)-3\cdot\cos(x)$**.**

Untersuchen Sie ob *f* eine gerade oder eine ungerade Funktion ist.

Lösung:

Es gilt:

$$f(-x)=\sin(-x)-3\cdot\cos(-x)=-\sin(x)-3\cdot\cos(x)=-(\sin(x)+3\cdot\cos(x)).$$

Die Funktion *f* ist weder eine gerade noch eine ungerade Funktion.