TANGENTEN

Sei f eine Funktion und K ihr Schaubild.

Die Steigung der Tangente an K in einem Punkt $M_0(x_0|f(x_0))$ ist gegeben durch die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0.

Ist f an der Stelle x_0 **differenzierbar**, dann hat K eine Tangente im Punkt $M_0(x_0|f(x_0))$, mit der Gleichung $\boxed{(t):\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$. **(1)**

Die **Normale** an K indem Punkt $M_0(x_0, f(x_0))$ hat die Steigung $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$ und

ihre Gleichung lautet: $\boxed{(n):\ y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)}$. **(2)**

Es gibt 3 Arten von Aufgaben(mit Tangenten), wie in folgenden Beispiele.

<u>Beispiel 1 (Tangente in einem Punkt):</u>

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^3$.
Bestimmen Sie die Tangente in dem Punkt $B(2|f(2))$.

<u>Ableitung</u>: $f'(x) = 3x^2$.

<u>Steigung:</u> $m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

<u>Funktionswert:</u> $f(2) = 2^3 = 8$.

<u>Gleichung der Tangente:</u> $(t):\ y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$\Rightarrow\ y = 12 \cdot (x-2) + 8 \ \Leftrightarrow\ y = 12x - 24 + 8$

$\Rightarrow\ (t):\ \underline{y = 12x - 16}$.

Beispiel 2 (Tangente mit der Steigung m):

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^3$. Ihr Schaubild ist K.
Bestimmen Sie die Tangenten mit der Steigung 12, an K.

Ableitung: $f'(x) = 3x^2$.
Berührpunkte: $m = f'(2) = 12 \;\Leftrightarrow\; 3 \cdot x^2 = 12 \;\Rightarrow\; x_1 = -2 \; und \; x_2 = 2$.

Funktionswerte: $f(2) = 2^3 = 8$; $f(-2) = (-2)^3 = -8$.

Gleichungen der Tangenten: $(t_1): y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$\Rightarrow \; y = 12 \cdot (x-2) + 8 \;\Leftrightarrow\; y = 12x - 24 + 8 \Rightarrow \underline{(t_1): y = 12x - 16}$.
$(t_2): y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Rightarrow \; y = 12 \cdot (x+2) - 8 \Leftrightarrow y = 12x + 24 - 8$
$\Rightarrow \underline{(t_2): y = 12x + 16}$

Beispiel 3(Tangente aus einem Punkt):

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^3$. Ihr Schaubild ist K.
Wie viele Tangenten kann man vom Punkt $P(-2|0)$ an K auslegen ($P \notin K$)?

Ableitung:
$f'(x) = 3x^2$.

Funktionswerte:
$f'(x_0) = 3x_0^2; \quad f(x_0) = x_0^3$

Berührpunkte:
$(t): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = 3x_0^2 \cdot (x - x_0) + x_0^3$

Punktprobe mit $P(-2|0)$:

$0 = 3x_0^2 \cdot (-2 - x_0) + x_0^3 \Leftrightarrow 0 = -6x_0^2 - 3x_0^3 + x_0^3 \Leftrightarrow -6x_0^2 - 2x_0^3 = 0$
$\Leftrightarrow -2x_0^2(3 + x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_{01} \cong 0, \; x_{02} = -3$.

$\Rightarrow$ Man kann vom Punkt $P(-2|0)$ aus, zwei Tangenten an K, in den Punkten $B_1(0|f(0))$ und $B_2(-3|f(-3))$, auslegen.