Vorbereitung für das Abitur Baden-Württemberg

Test1

Analysis und Algebra

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion *f* mit $f(x) = (5x+3)\cdot e^{-2x}$ **und vereinfachen Sie so weit wie möglich.**

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$**.**

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $x^5 - x^3 - 2x = 0$**.**

Aufgabe 4

Der Erwärmungsvorgang einer Materialprobe wird durch die Funktion *g* mit $g(t) = 100 - 70\cdot e^{-0{,}15\cdot t}$ **beschrieben (*t* in Minuten, *g*(*t*) in °C).**
Weisen Sie nach, dass die Temperatur der Materialprobe stets zunimmt.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{1}{x^3} + 3; \quad x \neq 0$**.**
Das Schaubild von *f* hat im Punkt $P(1|y)$ **die Tangente *t*.**
Ermitteln Sie eine Gleichung von *t*.
Die Tangente *t* schneidet die *y*-Achse im Punkt *S*.
Bestimmen Sie die Koordinaten von *S*.

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=(5x+3)\cdot e^{-2x}$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Lösung:

Produktregel:

$f(x)=u(x)\cdot v(x)$	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Kettenregel:

$$\boxed{f(x)=u(v(x)) \;\longrightarrow\; f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Ableitung:

$$f'(x)=5\cdot e^{-2x}+(5x+3)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)$$
$$=(5-2\cdot(5x+3))\cdot e^{-2x}=(5-10x-6)\cdot e^{-2x}$$
$$=(-10x-1)\cdot e^{-2x}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_2^6 \sqrt{2x-3}dx$.

Lösung:

$f(x)=(ax+b)^n$	$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)}$$

$$\int_2^6 \sqrt{2x-3}dx=\int_2^6 (2x-3)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6=\left[\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2x-3)^3}\right]_2^6=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2\cdot 6-3)^3}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{(2\cdot 2-3)^3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9^3}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1^3}=\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{9})^3-\frac{1}{3}\cdot(\sqrt{1})^3=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}.$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $x^5 - x^3 - 2x = 0$**.**

Lösung:

Ausklammern:

$x^5 - x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^4 - x^2 - 2\right) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$\Rightarrow x_1 = 0 \vee x^4 - x^2 - 2 = 0$

$x^4 - x^2 - 2 = 0$

Substitution: $x^2 = z \Rightarrow z^2 - z - 2 = 0$

Die quadratische Gleichung $z^2 - z - 2 = 0$ **lösen:**

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$**.** $\quad z^2 - z - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$**.** $\quad z^2 - z - 2 = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $z_1 = 2$ **und** $z_2 = -1$**.**

Rücksubstitution:

Aus $x^2 = 2$ **folgt** $x_2 = -\sqrt{2} \wedge x_3 = \sqrt{2}$ **;**

Die Gleichung $x^2 = -1$ **hat keine Lösungen.**

Lösungsmenge:

$IL = \left\{-\sqrt{2};\, 0;\, \sqrt{2}\right\}$**.**

Aufgabe 4

Der Erwärmungsvorgang einer Materialprobe wird durch die Funktion *g* mit $g(t) = 100 - 70 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t}$ **beschrieben (*t* in Minuten, *g*(*t*) in °C).**

Weisen Sie nach, dass die Temperatur der Materialprobe stets zunimmt.

Lösung:

> **Monotoniesatz:**
>
> Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a; b]$, dann ist *f* auf [*a*; *b*] monoton wachsend.
>
> Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a; b]$, dann ist *f* auf [*a*; *b*] monoton fallend.
>
> Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a; b]$, dann ist *f* auf [*a*; *b*] streng monoton wachsend.
>
> Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a; b]$, dann ist *f* auf [*a*; *b*] streng monoton fallend.

Ableitung:

$g'(t) = -70 \cdot (-0{,}15) \cdot e^{-0{,}15 \cdot t} = 10{,}5 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t}$.

Monotonie:

$g'(t) = 10{,}5 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t}$.

Es gilt $g'(t) > 0$**, da** $e^{-0{,}15 \cdot t} > 0$ **.**

Nach dem Monotoniesatz folgt, dass *g* streng monoton wachsend ist.

$\Rightarrow$ **Die Temperatur der Materialprobe nimmt stets zu.**

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{x^3}+3;\quad x\neq 0$**.**
Das Schaubild von *f* hat im Punkt $P(1|v)$ **die Tangente *t*.**
Ermitteln Sie eine Gleichung von *t*.
Die Tangente *t* schneidet die *y*-Achse im Punkt *S*.
Bestimmen Sie die Koordinaten von *S*.

Lösung:

Ableitung:

$$f(x)=\frac{1}{x^3}+3=x^{-3}+3$$
$$f'(x)=-3\cdot x^{-4}=\frac{3}{x^4}.$$

Bestimmung der Tangentengleichung:

$$(t): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Für die Stelle $x_0=1$ **gilt:**

$$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1);$$

$$f'(1)=\frac{3}{1^4}=3;\ f(1)=\frac{1}{1^3}+3=4$$

$$\Rightarrow y=3\cdot(x-1)+4=3x-3+4=3x+1$$

$$(t):\ \underline{y=3x+1}.$$

Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse:

$$y=3\cdot 0+1=1$$

$$\Rightarrow \underline{S(0|1)}.$$