Exponentialgleichungen

Aufgabe 1

Lösen Sie die Gleichung $4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x$**.**

Lösung:

$$4^x + 9^x = 2 \cdot 6^x \Leftrightarrow \quad 2^{2x} - 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^x - 3^x\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow \quad 2^x = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0$$

Lösungsmenge:

$$\Rightarrow \underline{IL = \{0\}.}$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 10e^{2x} + 16 = 0$**.**

Lösung:

$$e^{4x} - 10e^{2x} + 16 = 0$$

Substitution: $e^{2x} = z$**.**

$$z^2 - 10z + 16 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 8 \wedge z_2 = 2$$

Resubstitution: $e^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = \ln 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$ **;**

$$e^{2x} = 8 \Rightarrow 2x = \ln 8 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ln 8 = \ln\sqrt{8} = \ln\left(2\sqrt{2}\right).$$

Lösungsmenge:

$$\underline{IL = \left\{\ln\sqrt{2}; \ln\left(2\sqrt{2}\right)\right\}.}$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^x - 2 - \frac{8}{e^x} = 0$.

Lösung:.

$$e^x - 2 - \frac{8}{e^x} = 0 \quad \Big| \cdot e^x \quad \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 8 = 0;$$

Substitution: $e^x = z$

$$z^2 - 2z - 8 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 4 \wedge z_2 = -2.$$

Resubstitution: $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$.

$e^x = -2$ hat keine Lösungen.

Lösungsmenge: $IL = \{\ln 4\}$.

Aufgabe 4

Lösen Sie die Gleichung $\left(e^{2x+2} - e^{4x}\right) \cdot \left(\frac{1}{e^{x-1}} - 2\right) = 0$.

Lösung:.

$$\left(e^{2x+2} - e^{4x}\right) \cdot \left(\frac{1}{e^{x-1}} - 2\right) = 0 \;\Leftrightarrow e^{3x+2} - e^{4x} = 0 \vee \frac{1}{e^{x-1}} - 2 = 0$$

Es folgt:

$e^{3x+2} - e^{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x+2} = e^{4x} \Leftrightarrow 3x + 2 = 4x \Rightarrow x_1 = 0.5$ **und**

$$\frac{1}{e^{x-1}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x-1}} - = 2 \Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = \ln 0.5 \Rightarrow x_2 = 1 + \ln 0.5.$$

Lösungsmenge: $IL = \{1 + \ln 0.5; 0.5\}$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Gleichung: $e^{1-2x} + e^{-x} = \frac{2}{e}$**.**

Lösung:

$e^{1-2x} + e^{-x} = \frac{2}{e}$

$\Leftrightarrow e^1 \cdot e^{-2x} + e^{-x} = \frac{2}{e}$

$\Leftrightarrow \frac{e}{e^{2x}} + \frac{1}{e^x} = \frac{2}{e} \Big| \cdot e^{2x}$

$\Leftrightarrow e + e^x = \frac{2e^{2x}}{e} \Big| \cdot e$

$\Leftrightarrow e^2 + e \cdot e^x = 2e^{2x}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x} - e \cdot e^x - e^2 = 0$**.**

Substitution: $e^x = z$

$\Leftrightarrow 2z^2 - e \cdot z - e^2 = 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - (-8e^2)}}{4} = \frac{e \pm \sqrt{9e^2}}{4} = \frac{e \pm 3e}{4}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{e+3e}{4} = \frac{4e}{4} = e$ **und** $z_2 = \frac{e-3e}{4} = \frac{-2e}{4} = -\frac{e}{2}$**.**

Resubstitution:

$e^x = e \Rightarrow x = 1$**.**

$e^x = -\frac{e}{2} \Rightarrow keineLösung$**.**

Lösungsmenge:

$$IL = \{1\}.$$

Aufgabe 6

Lösen Sie die Gleichung $e^{3x-4} = 3 \cdot e^x$**.**

Lösung:

$e^{3x-4} = 3 \cdot e^x \Leftrightarrow e^{3x-4} - 3 \cdot e^x = 0$ **(**e^x **ausklammern)**

$\Leftrightarrow \; e^x \cdot (e^{2x-4} - 3) = 0$

Satz des Nullprodukts: $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ **oder** $B = 0$

$e^x = 0$ **oder** $e^{2x-4} - 3 = 0$

1. $\underline{e^x = 0}$

Die Gleichung hat keine Lösungen, da $e^x > 0$ **für alle** $x \in IR$ **gilt.**

$\Rightarrow IL_1 = \{ \ \}$**.**

2. $\underline{e^{2x-4} = 3}$

Beide Seiten logarithmieren: $2x - 4 = \ln 3 \;\; |+4$

$\Leftrightarrow 2x = 4 + \ln 3 \;\; |:2$

$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln 3$

$\Rightarrow IL_2 = \left\{ 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \right\}$**.**

Lösungsmenge:

$$IL = IL_1 \cup IL_2 = \left\{ 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \right\}.$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichung:

$$\frac{2^x + 0{,}5 \cdot 3^x}{2^x - 0{,}5 \cdot 3^x} = 2\,.$$

Lösung:

Definitionsmenge:

$2^x - 0{,}5 \cdot 3^x = 0$

$\Leftrightarrow 2^x = 0{,}5 \cdot 3^x \Leftrightarrow 1 = 0{,}5 \cdot \frac{3^x}{2^x} \Leftrightarrow 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$\Leftrightarrow 1{,}5^x = 2 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1{,}5}$

$\Rightarrow D = IR / \frac{\log 2}{\log 1{,}5}$

Gleichung lösen:

$2^x + 0{,}5 \cdot 3^x = 2 \cdot \left(2^x - 0{,}5 \cdot 3^x\right)$

$\Leftrightarrow 2^x + 0{,}5 \cdot 3^x = 2 \cdot 2^x - 3^x$

$\Leftrightarrow 1{,}5 \cdot 3^x = 2^x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

$\Rightarrow x = -1$

Lösungsmenge: $IL = \{-1\}$.

Aufgabe 8

Lösen Sie die Gleichung $15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6}$**.**

Lösung:

$15^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6} \Leftrightarrow 3^{2x-3} \cdot 5^{2x-3} = 3^x \cdot 5^{3x-6} \Leftrightarrow 3^{2x-3-1} = 5^{3x-6-(2x-3)}$

$$\Leftrightarrow 3^{2x-3-x} = 5^{3x-6-(2x-3)} \Leftrightarrow 3^{x-3} = 5^{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} = 1 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3.$$

Lösungsmenge:

$\Rightarrow$ ***IL* = {3}.**

Aufgabe 9

Lösen Sie die Gleichung: $3^{x+3} - 9^{x+1} = 18$.

Lösung:.

$3^{x+3} - 9^{x+1} = 18 \Leftrightarrow 3^x \cdot 27 - 9^x \cdot 9 - 18 = 0$;

Substitution: $3^x = z$

$$9z^2 - 27z + 18 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 \wedge z_2 = 2.$$

Resubstitution: $3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$.

$$3^x = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3 2 \ .$$

Lösungsmenge: $IL = \{0, \log_3 2\}$.