Extrempunkte

Hochpunkt

Notwendige Bedingung: $f'(x_0)=0$
Hinreichende Bedingung: $f''(x_0)<0$ **oder Vorzeichenwechsel von** f' **,von Plus nach Minus, an der Stelle** x_0 **.**

Tiefpunkt

Notwendige Bedingung: $f'(x_0)=0$
Hinreichende Bedingung: $f''(x_0)>0$ **oder Vorzeichenwechsel von** f' **,von Minus nach Plus, an der Stelle** x_0 **.**

Beispiel 1

Gegeben sei die Funktion f **durch** $f(x)=x^4-10x^2+9$**.**
Bestimmen Sie exakt die Extrempunkte der Funktion.

Lösung:

Es gilt: $f'(x)=4x^3-20x$ und $f''(x)=12x^2-20$.

Notwendige Bedingung:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-20x=0 \Leftrightarrow x\cdot\left(4x^2-20\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \; oder \; 4x^2-20=0$$

$x_1=0$;
$4x^2-20=0 \Leftrightarrow 4x^2=20 \Leftrightarrow x^2=5 \Rightarrow x_2=-\sqrt{5}; \quad x_3=\sqrt{5}$;

Hinreichende Bedingung:

$$f''(0)=12\cdot 0^2-20=-20<0;\; f(0)=0^4-10\cdot 0^2+9=9 \Rightarrow H\left(0\middle|0\right).$$

$$f''(\pm\sqrt{5})=12\cdot\left(\pm\sqrt{5}\right)^2-20=12\cdot 5-20=40>0;$$

$$f(\pm\sqrt{5})=\left(\pm\sqrt{5}\right)^4-10\cdot\left(\pm\sqrt{5}\right)^2+9=25-10\cdot 5+9=-16 \Rightarrow T_1\left(-\sqrt{5}\middle|-16\right) und \; T_2\left(\sqrt{5}\middle|-16\right).$$

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}};\quad x\neq 0$**. Ihr Schaubild sei *K*.**

Zeigen Sie, dass *K* einen Extrempunkt hat.

Lösung:

Ableitung:

$$f'(x)=2x\cdot e^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\cdot e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}=(2x-1)\cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Notwendige Bedingung:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(2x-1)\cdot e^{\frac{1}{x}}=0\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

.

Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechsel von f'**):**

$$f'(-1)=(2\cdot(-1)-1)\cdot e^{\frac{1}{-1}}=-3\cdot e^{-1}=-\frac{3}{e}<0;$$

$$f'(0.25)=(2\cdot 0.25-1)\cdot e^{\frac{1}{0.25}}=-0.5\cdot e^4<0;$$

$$f'(1)=(2\cdot 1-1)\cdot e^{\frac{1}{1}}=e>0.$$

x	$-\infty$ 0 $\frac{1}{2}$ ∞
$f'(x)$	− − − − − − − − 0 + + + + + + + + +

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot e^2=\frac{e^2}{4};$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{e^2}{4}\right).$$