Monotonie

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Funktion *f* mit $f(x) = 2x + 0{,}5x^2$ auf Monotonie.

Lösung:

$f(x) = 2x + 0{,}5x^2$

$f'(x) = 2 + x$

x	$-\infty$ -2 ∞
$f'(x) = 2 + x$	$- - - - - - - - - - - - - -$ 0 $+ + + + + + + + + + + + + + +$
$f(x) = 2x + 0{,}5x^2$	$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$ **T** $\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

Für $x \in (-\infty; -2)$ ist f monoton fallend, da $f'(x) \le 0$ gilt
und für $x \in (-2; \infty)$ ist f monoton steigend, da $f'(x) \ge 0$ gilt.

Aufgabe 2

Die Funktion *f* ist durch $f(x) = x^2.e^{\frac{1}{x}}$ gegeben.
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von *f*.

Lösung:

Ableitung:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Monotonie:

$f'(x) = (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

x	$-\infty$ **0** **0,5** ∞
$e^{-\frac{1}{x}}$	$+ + + + + + + + +$ | $+ + + + + + + + + + + + +$
2x-1	$- - - - - - - - - - - - - - - -$ **0** $+ + + + + + +$
$f'(x) = (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}}$	$- - - - - - - - - -$ | $- - - -$ **0** $+ + + + + + + +$

Für $x \in (-\infty;0) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right]$ **ist** f **monoton fallend, da** $f'(x) \le 0$ **gilt.**

Für $x \in \left[\frac{1}{2};\infty\right)$ **ist** f **monoton steigend, da** $f'(x) \ge 0$ **gilt.**

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion F **mit** $F(x) = \int_0^x (\cos t - \sin t)dt$**.**

Zeigen Sie, dass F **auf dem Intervall** $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ **monoton fallend ist.**

Lösung:

Ableitung:

Es gilt: $F'(x) = \cos x - \sin x$

Monotonie:

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \sin x$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \wedge x_2 = \frac{3\pi}{4}$

x	**0** $\quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{4} \quad$ **2π**
$F'(x) = \cos - \sin x$	**+ + + + + 0 − − − − − − − 0 + + + + + +**

Für $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ **ist** $F'(x) = \cos x - \sin x \le 0$

$\Rightarrow$ ***F* ist auf** $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ **monoton fallend.**

Aufgabe 4

Sei $f:[2;\infty)\to IR,\ x\to f(x)=8\cdot\ln x-(x-1)(7-x)$ **.**
Zeigen Sie, dass die Funktion f **streng monoton wachsend ist.**

Lösung:

Ableitung:

$$f'(x)=8\cdot\frac{1}{x}-(1\cdot(7-x)+(x-1)\cdot(-1))=\frac{8}{x}-7+x+x-1=\frac{8}{x}+2x-8=\frac{2x^2-8x+8}{x}.$$

Monotonie:

$$f'(x)=\frac{2}{x}\cdot(x-2)^2$$

Für $x\geq 2$ **gilt** $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ **f ist streng monoton wachsend auf** D_f **.**

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Monotonie-Intervalle der Funktion $f_t(x)=\frac{1}{t}x^3-3x$ **in Abhängigkeit vom Parameter t >0.**

Lösung:

Ableitung:

$$f_t'(x)=\frac{3}{t}x^2-3$$

Monotonie:

$$f_t'(x)=0\Leftrightarrow\ \frac{3}{t}x^2-3=0\Leftrightarrow\frac{3}{t}x^2=3\Leftrightarrow x^2=t\Rightarrow x=\pm\sqrt{t}$$

Für $x\in\left(-\infty;-\sqrt{t}\right)\cup\left(\sqrt{t};\infty\right)$ **gilt** $f_t'(x)=\frac{3}{t}x^2-3>0$ **und daher ist** $f_t(x)$ **monoton steigend.**

Für $x\in\left(-\sqrt{t};\sqrt{t}\right)$ **gilt** $f_t'(x)=\frac{3}{t}x^2-3<0$ **und daher ist** $f_t(x)$ **monoton fallend.**

Aufgabe 6

Die Messungen an einer Messstation ergaben für die Durchflussgeschwindigkeit eines Flusses, Werte die sich näherungsweise durch die Funktion $v(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{67}{8}t^2 - \frac{401}{4}t + 385$**, im Intervall [8; 22], beschreiben lassen (*t* in Stunden; *v*(*t*) in** $\frac{m^3}{\min}$**).**
Zeigen Sie, dass die Durchflussgeschwindigkeit in diesem Zeitintervall abnimmt.

Lösung:

Die Funktion $v(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{67}{8}t^2 - \frac{401}{4}t + 385$ **beschreibt die Durchflussgeschwindigkeit, die zwischen 8 und 22 Uhr gemessen wird.**

Ableitung:

$$v'(t) = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{67}{4}t - \frac{401}{4} = -\frac{1}{4}\cdot(3t^2 - 67t + 401).$$

Monotonie:

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot(3t^2 - 67t + 401) = 0 \quad .$$
$$\Leftrightarrow 3t^2 - 67t + 401 = 0$$

Da die Diskriminante $\Delta = \sqrt{67^2 - 4\cdot 3\cdot 401} < 0$ **ist, hat diese Gleichung keine Lösungen.**
Es gibt, also, keine Nullstellen.

Es gilt daher $v'(t) < 0$ **und nach dem Monotoniesatz folgt dass die Funktion** v **monoton fallend ist.**

Die Durchflussgeschwindigkeit nimmt also im Zeitintervall [8; 22] ab.

Aufgabe 7

Der Erwärmungsvorgang einer Materialprobe wird durch die Funktion *g* mit $g(t) = 95 - 65 \cdot e^{-0,15 \cdot t}$ **beschrieben (*t* in Minuten, *g*(*t*) in °C).**

Weisen Sie nach, dass die Temperatur der Materialprobe stets zunimmt.

Lösung:

Ableitung:

$g'(t) = -65 \cdot (-0,15) \cdot e^{-0,15 \cdot t} = 9,75 \cdot e^{-0,15 \cdot t}$.

Monotonie:

Es gilt: $g'(t) = 9,75 \cdot e^{-0,15 \cdot t}$

$g'(t) > 0$**, da** $e^{-0,15 \cdot t} > 0$

$\Rightarrow$ ***g* ist streng monoton wachsend für alle t**$\in \Re$**.**

Die Temperatur der Materialprobe nimmt stets zu.