Nullstellen von Funktionen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^5-\frac{1}{4}x^3$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

Lösung:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^5-\frac{1}{4}x^3=0 \Leftrightarrow x^3\cdot\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0$**;**

Satz vom Nullprodukt:

$x^3=0 \quad \vee \quad \left(x^2-\frac{1}{4}\right)=0$**;**

$x^3=0 \quad \Rightarrow x_1=0$**;**

$x^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x_2=-\frac{1}{2} \wedge x_3=\frac{1}{2}$**.**

Die Nullstellen von f sind: $x_1=0$; $x_2=-\frac{1}{2}$ und $x_3=\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=2e^{x-1}-4$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f exakt.

Lösung:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x-1}-4=0$

$\Leftrightarrow 2e^{x-1}=4 \Leftrightarrow e^{x-1}=2$

$\Leftrightarrow x-1=\ln(2)$

$\Rightarrow x=1+\ln(2).$

Die Funktion f besitzt die Nullstelle x=1+ln(2).

Aufgabe 3

Die Nullstellen einer Polynomfunktion dritten Grades sind $x_1 = 1$ **und** $x_2 = -3$**.**

$x_1 = 1$ **ist eine einfache und** $x_2 = -3$ **eine doppelte Nullstelle.**

Der Graph der Funktion f **verläuft durch den Punkt** $P(2|\,5)$**.**

Geben Sie den Funktionsterm von f **an.**

Lösung:

$f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x+3)^2$ **;**

Punktprobe mit $P(2|\,5)$**:**

$5 = a \cdot (2-1) \cdot (2+3)^2 \Leftrightarrow 5 = a \cdot 1 \cdot 25 \Leftrightarrow 5 = 25a \Rightarrow a = \frac{1}{5}$ **;**

Der Funktionsterm von f **lautet:** $f(x) = 0{,}2 \cdot (x-1) \cdot (x+3)^2$**.**

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f **mit** $f(x) = e^{3x-1} - e^2$**. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion** f**.**

Lösung:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{3x-1} - e^2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{3x-1} = e^2$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = 2 \Leftrightarrow 3x = 3$

$\Rightarrow x = 1.$

Die Funktion f **besitzt die Nullstelle** x**=1.**

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = x^3 - t \cdot \left(x^2 - 0{,}25x\right); t \in \Re$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_t in Abhängigkeit von *t*.

Lösung:

$f_t(x) = x^3 - t \cdot \left(x^2 - 0{,}25x\right) = x^3 - tx^2 + 0{,}25tx$**;**

$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - tx^2 + 0{,}25tx = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - tx + 0{,}25t\right) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

$x = 0 \vee \left(x^2 - tx + 0{,}25t\right) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2 - tx + 0{,}25t = 0$

$x_{2,3} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}25t}}{2 \cdot 1} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - t}}{2}$.

Für die Diskriminante $\Delta = t^2 - t$ gilt:

1. $\Delta = 0$ **für t=0 und t=1;**
2. $\Delta < 0$ **für** $0 < t < 1$**:**
3. $\Delta > 0$ **für** $t < 0 \wedge t > 1$**.**

Die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_t in Abhängigkeit von *t*:

- **für t=0 und t=1gibt es zwei Nullstellen;**
- **für $0 < t < 1$ gibt es eine Nullstelle: x=0;**
- **für $t < 0 \wedge t > 1$gibt es drei Nullstellen.**