Aufgabe 1

Für jedes $t \in IR$ ist die Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -\frac{1}{2}x^4 + t^2x^2;\ x \in IR$.
Das Schaubild von f_t heißt K_t.
Bestimmen Sie die Ortskurve der Hochpunkte aller K_t.

Lösung:

Für $f_t(x) = -\frac{1}{2}x^4 + t^2x^2$ gilt:

$f_t'(x) = -2x^3 + 2t^2x$ **und**

$f_t''(x) = -6x^2 + 2t^2$.

Bestimmung der Hochpunkte:

1. $f_t'(x) = 0$

$\Leftrightarrow\ -2x^3 + 2t^2x = 0 \Leftrightarrow\ -2x(x^2 - t^2) = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 0$ **oder** $x^2 - t^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -t; x_3 = t$.

2. $f_t''(0) = 2t^2 > 0 \Rightarrow$ **an der Stelle $x = 0$ gibt es einen Tiefpunkt;**

$f_t''(\pm t) = -6t^2 + 2t^2 = -4t^2 < 0 \Rightarrow$ **an den Stellen $x = \pm t$ gibt es Hochpunkte.**

Es gilt: $f_t(\pm t) = -\frac{1}{2}t^4 + t^2 \cdot t^2 = -\frac{1}{2}t^4 + t^4 = \frac{1}{2}t^4$

$\Rightarrow HP\left(\pm t \middle| \frac{1}{2}t^4\right)$.

Bestimmung der Ortskurve:

$HP\left(\pm t \middle| \frac{1}{2}t^4\right)$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = \pm t \\ y = \frac{1}{2}t^4 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} t = \pm x \\ y = \frac{1}{2}t^4 \end{array}\right| \Rightarrow \underline{y = \frac{1}{2}x^4}$.

<u>Aufgabe 2</u>

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t definiert durch $f_t(x) = 3x - t^2x^3$.
K_t ist das Schaubild von f_t.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortslinie der Tiefpunkte aller K_t.

<u>Lösung:</u>

Für $f_t(x) = 3x - t^2x^3$ gilt:
$f_t'(x) = 3 - 3t^2x^2$ **und**
$f_t''(x) = -6t^2x$.

<u>Bestimmung der Tiefpunkte</u>:

1. $f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3t^2x^2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{t^2}$
$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{t}$ **oder** $x_2 = \frac{1}{t}$.
2. $f_t''\left(\frac{1}{t}\right) = -6t^2 \cdot \frac{1}{t} = -6t < 0 \Rightarrow$ **an der Stelle** $x = \frac{1}{t}$ **gibt es einen Hochpunkt;**

$f_t''\left(-\frac{1}{t}\right) = -6t^2 \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) = 6t > 0 \Rightarrow$ **an der Stelle** $x = -\frac{1}{t}$ **gibt es einen Tiefpunkt.**

Es gilt: $f_t\left(-\frac{1}{t}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) - t^2 \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)^3 = -\frac{3}{t} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{t}$

$\Rightarrow \underline{HP\left(-\frac{1}{t} \middle| -\frac{2}{t}\right)}$.

<u>Bestimmung der Ortskurve</u>:

$$HP\left(-\frac{1}{t} \middle| -\frac{2}{t}\right) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = -\frac{1}{t} \\ y = -\frac{2}{t} \end{matrix}\right| \Rightarrow y = 2x.$$

Die Ortskurve der Hochpunkte aller K_t lautet: $\underline{y = 2x}$.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktionenschar f_t **mit** $f_t(x) = \frac{1}{4t}x^4 - tx^2 - 1; t > 0$.

K_t **sei das Schaubild von** f_t.

Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte aller K_t.

Lösung:

Für $f_t(x) = \frac{1}{4t}x^4 - tx^2 - 1$ **gilt:**

$f_t'(x) = \frac{1}{t}x^3 - 2tx$ **und**

$f_t''(x) = \frac{3}{t}x^2 - 2t$.

Bestimmung der Tiefpunkte:

1. $f_t'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{t}x^3 - 2tx = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2t^2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2t^2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ **oder** $x^2 - 2t^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}t; x_3 = \sqrt{2}t$.

2. $f_t''(0) = -2t < 0 \Rightarrow$ **an der Stelle** $x = 0$ **gibt es einen Hochpunkt;**

$f_t''(\pm\sqrt{2}t) = \frac{3}{t} \cdot \left(\pm\sqrt{2}t\right)^2 - 2t = 6t - 2t = 4t > 0 \Rightarrow$ **an den Stellen** $x = \pm\sqrt{2}t$ **gibt es Tiefpunkte.**

Es gilt:

$f_t(\pm\sqrt{2}t) = \frac{1}{4t} \cdot \left(\pm\sqrt{2}t\right)^4 - t \cdot \left(\pm\sqrt{2}t\right)^2 - 1 = \frac{1}{4t} \cdot 4t^4 - t \cdot 2t^2 - 1 = t^3 - 2t^3 - 1 = -t^3 - 1$

$\Rightarrow \underline{HP\left(\pm\sqrt{2}t \middle| -t^3 - 1\right)}$.

Bestimmung der Ortskurve:

$$HP\left(\pm\sqrt{2}t \middle| -t^3 - 1\right) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x = \pm\sqrt{2}t \\ y = -t^3 - 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} t = \pm\frac{x}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2}t^4 \end{vmatrix} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{8}x^4.$$

Die Ortskurve der Tiefpunkte aller K_t **lautet:** $\underline{y = \frac{1}{8}x^4}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f_t **durch** $f_t(x)=\frac{t^2}{3}x^3-4tx^2+\frac{2}{3}x$**. Ihr Schaubild sei** K_t**.**

Bestimmen Sie die Ortskurve der Wendepunkte aller K_t**.**

Lösung:

Für $f_t(x)=\frac{t^2}{3}x^3-4tx^2+\frac{2}{3}x$ **gilt:**

$f_t'(x)=t^2x^2-8tx+\frac{2}{3}$**;**

$f_t''(x)=2t^2x-8t$ **und** $f_t'''(x)=2t^2$**.**

Bestimmung der Wendepunkte:

1. $f_t''(x)=0$

$\Leftrightarrow\ 2t^2x-8t=0 \Leftrightarrow\ 2t^2x=8t$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{8t}{2t^2}=\frac{4}{t}$

2. $f_t'''\left(\frac{4}{t}\right)=2t^2\neq 0 \Rightarrow$ **an der Stelle** $x=\frac{4}{t}$ **gibt es einen Wendepunkt.**

Es gilt: $f_t\left(\frac{4}{t}\right)=\frac{t^2}{3}\cdot\left(\frac{4}{t}\right)^3-4t\cdot\left(\frac{4}{t}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{t}=\frac{64}{3t}-\frac{64}{t}+\frac{8}{3t}=-\frac{40}{t}$

$\Rightarrow \underline{WP\left(\frac{4}{t}\middle|-\frac{40}{t}\right)}$**.**

Bestimmung der Ortskurve:

$$WP\left(\frac{4}{t}\middle|-\frac{40}{t}\right) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{4}{t} \\ y=-\frac{40}{t} \end{array}\right| \Rightarrow y=-10x.$$

Die Ortskurve der Wendepunkte aller K_t **lautet:** $\underline{y=-10x}$**.**

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f_t **durch** $f_t(x) = \frac{1}{9} \cdot x \cdot (\frac{x}{t} - 3)^2$, $t > 0$**.**
Ihr Schaubild sei K_t**.**
Geben Sie die Ortskurve der Hochpunkte von K_t **an.**

Lösung:
Für $f_t(x) = \frac{1}{9} \cdot x \cdot \left(\frac{x}{t} - 3\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot x \cdot \left(\frac{x^2}{t^2} - 6 \cdot \frac{x}{t} + 9\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{t^2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{t} + x$ **gilt:**

$f_t'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{t^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{t} + 1$ **und**
$f_t''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{t^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t}$**.**

Bestimmung der Hochpunkte:

1. $f_t'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{t^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{t} + 1 = 0 \,\big|\cdot 3t^2 \Leftrightarrow x^2 - 4tx + 3t^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = 2t \pm \sqrt{4t^2 - 3t^2} = 2t \pm t$

$\Rightarrow x_1 = t$ **und** $x_2 = 3t$

2. $f_t''(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{t^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} < 0 \Rightarrow$ **an der Stelle *x = t* gibt es einen Hochpunkt;**
$f_t''(3t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3t}{t^2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} > 0 \Rightarrow$ **an den Stellen** $x = 3t$ **gibt es einen Tiefpunkt.**

Es gilt: $f_t(t) = \frac{1}{9} \cdot t \cdot (\frac{t}{t} - 3)^2 = \frac{4}{9} \cdot t \qquad \Rightarrow HP\left(t \middle| \frac{4}{9}t\right)$**.**

Bestimmung der Ortskurve:

$$HP\left(t \middle| \frac{4}{9}t\right) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = t \\ y = \frac{4}{9} \cdot t \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} t = x \\ y = \frac{4}{9} \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow y = \frac{4}{9}x.$$

Die Ortskurve der Hochpunkte aller K_t **lautet:** $\underline{\underline{y = \frac{4}{9}x}}$**.**

<u>Aufgabe 6</u>

Gegeben ist die Funktion f_t **durch** $f_t(x) = \frac{1}{t^2} \cdot x^3 - \frac{1}{t} \cdot x^2;\ x \in IR;\ t \in IR_+^*$.

Ihr Schaubild sei K_t.

Zeigen Sie, dass die Wendepunkte aller Schaubilder K_t **auf einer Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.**

<u>Lösung:</u>

Für $f_t(x) = \frac{1}{t^2} \cdot x^3 - \frac{1}{t} \cdot x^2$ **gilt:**

$f_t'(x) = \frac{3}{t^2} \cdot x^2 + \frac{2}{t} \cdot x$ **;**

$f_t''(x) = \frac{6}{t^2} \cdot x + \frac{2}{t}$ **und**

$f_t'''(x) = \frac{6}{t^2}$.

<u>Bestimmung der Wendepunkte</u>:

1. $f_t''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{6}{t^2} \cdot x + \frac{2}{t} = 0 \Leftrightarrow 6x + 2t = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{t}{3}$

2. $f_t'''\left(-\frac{t}{3}\right) = \frac{6}{t^2} \neq 0 \Rightarrow$ **an der Stelle** $x = -\frac{t}{3}$ **gibt es einen Wendepunkt.**

Es gilt: $f_t\left(-\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{t^2} \cdot \left(-\frac{t}{3}\right)^3 - \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{t}{3}\right)^2 = -\frac{t}{27} - \frac{t}{3} = -\frac{10t}{27} \Rightarrow WP\left(-\frac{t}{3} \middle| -\frac{10t}{27}\right)$.

<u>Bestimmung der Ortskurve</u>:

$$WP\left(-\frac{t}{3} \middle| -\frac{10t}{27}\right) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} x = -\frac{t}{3} \\ y = -\frac{10t}{27} \end{array} \right| \Rightarrow y = -\frac{10}{9}x.$$

Die Ortskurve der Wendepunkte aller K_t **lautet:** $\underline{y = -\frac{10}{9}x}$.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Funktion f_t **durch** $f_t(x)=\frac{x}{t^2}\cdot e^{-t\cdot x}; t>0$**.**

K_t **ist das Schaubild von** f_t**. Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte aller** K_t

Lösung:

Bestimmung der Hochpunkte:

$$f_t'(x)=\frac{1}{t^2}\cdot\left(1\cdot e^{-t\cdot x}+x\cdot(-t)\cdot e^{-t\cdot x}\right)=\frac{1}{t^2}\cdot(1-tx)\cdot e^{-t\cdot x}.$$

$$f_t'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{t^2}\cdot(1-tx)\cdot e^{-t\cdot x}=0\Leftrightarrow 1-tx=0\Leftrightarrow tx=1\Rightarrow x=\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow x_{HP}=\frac{1}{t}.$$

(1)

$$y_{HP}=f_t(x_{HP})=\frac{t}{t^2}\cdot e^{-t\cdot\frac{1}{t}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow\quad y_{HP}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e}. \qquad (2)$$

Bestimmung der Ortskurve:

Aus (1) und (2) $\Rightarrow \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t} \\ y=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{e}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t} \\ y=x\cdot\frac{1}{e}\end{matrix}\right|$

$\Rightarrow$ **die Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte aller** K_t **lautet:**

$$\underline{y=\frac{1}{e}\cdot x;\ x>0}.$$

Aufgabe 8

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t definiert durch $f_t(x) = \frac{1}{x} - \frac{t^2}{x^3}; x \neq 0$.

K_t ist das Schaubild von f_t. Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte aller K_t

Lösung:

Bestimmung der Tiefpunkte:

$$f_t'(x) = -1 \cdot x^{-2} - t^2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -x^{-2} + 3t^2 \cdot x^{-4} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3t^2}{x^4}.$$

$$f_t''(x) = 2 \cdot x^{-3} + 3t^2 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = \frac{2}{x^3} - \frac{12t^2}{x^5}.$$

$$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} + \frac{3t^2}{x^4} = 0 \;\Big|\cdot x^4 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3t^2$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{3} \cdot t \wedge x_2 = \sqrt{3} \cdot t.$$

$$f_t''(\sqrt{3} \cdot t) = \frac{2}{(\sqrt{3} \cdot t)^3} - \frac{12t^2}{(\sqrt{3} \cdot t)^5} = \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t^3} - \frac{12}{9\sqrt{3} \cdot t^3} = -\frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t^3} < 0$$

$$\Rightarrow HP\left(\sqrt{3} \cdot t \,\middle|\, f_t(\sqrt{3} \cdot t)\right).$$

$$f_t''(-\sqrt{3} \cdot t) = \frac{2}{(-\sqrt{3} \cdot t)^3} - \frac{12t^2}{(-\sqrt{3} \cdot t)^5} = -\frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t^3} + \frac{12}{9\sqrt{3} \cdot t^3} = \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t^3} > 0.$$

$$\Rightarrow TP\left(-\sqrt{3} \cdot t \,\middle|\, f_t(-\sqrt{3} \cdot t)\right)$$

$$\Rightarrow x_{TP} = -\sqrt{3} \cdot t \qquad \textbf{(1)}$$

$$y_{TP} = f_t(x_{TP}) = \frac{1}{-\sqrt{3} \cdot t} - \frac{t^2}{(-\sqrt{3} \cdot t)^3} = -\frac{1}{\sqrt{3} \cdot t} + \frac{1}{3\sqrt{3} \cdot t} = -\frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad y_{TP} = -\frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t} \qquad \textbf{(2)}$$

Bestimmung der Ortskurve:

Aus (1) und (2) $\Rightarrow \begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \cdot t \\ y = -\frac{2}{3\sqrt{3} \cdot t} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = -\frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = -\frac{x}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{2}{3 \cdot x} \end{array};$

Die Gleichung der Ortskurve der Tiefpunkte aller K_t lautet:

$$\underline{y = \frac{2}{3 \cdot x}; x < 0.}$$

Aufgabe 9

Gegeben ist die Funktion f_t durch $f_t(x) = (2x - t)\cdot e^{\frac{x}{t}}; t > 0$.
Ihr Schaubild ist K_t. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W_t.
Zeigen Sie, dass die Wendepunkte aller K_t auf einer Geraden liegen.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden.

Lösung:

Wendepunkte:

$$f_t'(x) = 2\cdot e^{\frac{x}{t}} + (2x - t)\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{x}{t}} = \left(2 + \frac{2x}{t} - 1\right)\cdot e^{\frac{x}{t}} = \left(1 + \frac{2x}{t}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}.$$

$$f_t''(x) = \frac{2}{t}\cdot e^{\frac{x}{t}} + \left(1 + \frac{2x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{x}{t}} = \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t} + \frac{2x}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}} = \left(\frac{3}{t} + \frac{2x}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}.$$

$$f_t''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{t} + \frac{2x}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{t} + \frac{2x}{t^2} = 0 \,\Big|\cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow 3t + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -3t \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\cdot t$$

$$\Rightarrow x_W = -\frac{3}{2}\cdot t \qquad \textbf{(1)}$$

$$y_W = f_t(x_W) = \left(2\cdot\left(-\frac{3}{2}\cdot t\right) - t\right)\cdot e^{-\frac{3}{2}} = (-3t - t)\cdot e^{-\frac{3}{2}} = -4t\cdot e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{e^3}}\cdot t$$

$$\Rightarrow y_W = -\frac{4}{\sqrt{e^3}}\cdot t \qquad \textbf{(2)}$$

Eliminierung des Parameters *t*:

Aus (1) und (2) $\Rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2}\cdot t \\ y = -\frac{4}{\sqrt{e^3}}\cdot t \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = -\frac{2}{3}\cdot x \\ y = -\frac{4}{\sqrt{e^3}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot x\right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = -\frac{2}{3}\cdot x \\ y = \frac{8}{3\sqrt{e^3}}\cdot x \end{array}$

$\Rightarrow$ **die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte aller K_t lautet:**

$$\underline{y = \frac{8}{3\sqrt{e^3}}\cdot x;\ \ x < 0.}$$