Vorbereitung für das Abitur
Baden –Württemberg

Test5

Analysis und Algebra

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x^2 - 1)$ **.**

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2x-1} - e^{2x-1}$ **an.**

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $\left(x - \sqrt{x+2}\right) \cdot \left(e^{2x} - e\right) = 0$ **.**

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - 1$**. Ihr Schaubild sei K.**
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente an K.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2 \cdot \sqrt{\cos(x)};\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$**.**
Das Schaubild der Funktion f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper.
Berechnen Sie dessen Volumen.

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x^2 - 1)$.

Lösung:

Regeln:

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

$$\boxed{f(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)}$$

Ableitung: $f'(x) = 1 \cdot \sin(x^2 - 1) + x \cdot \cos(x^2 - 1) \cdot 2x = \sin(3x^2 - 1) + 2x^2 \cdot \cos(3x^2 - 1)$.

$$\underline{f'(x) = \sin(3x^2 - 1) + 2x^2 \cdot \cos(3x^2 - 1)}.$$

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2x-1} - e^{2x-1}$ an.

Lösung:

Umformung von f: $f(x) = \sqrt{2x-1} - e^{2x-1} = (2x-1)^{\frac{1}{2}} - e^{2x-1}$.

Regeln:

$$\boxed{f(x) = (ax+b)^n \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C}$$

$$\boxed{f(x) = e^{ax+b} \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1}.$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x-1)^3} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x-1}}.$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $\left(x-\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(e^{2x}-e\right)=0$.

Lösung:

$$\left(x-\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(e^{2x}-e\right)=0$$

Satz des Nullprodukts anwenden:

1. $x-\sqrt{x+2}=0$ **(Wurzelgleichung)**

$$x-\sqrt{x+2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2-x-2=0$$

- allgemeine Form: $ax^2+bx+c=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}$$

- Normalform: $x^2+px+q=0$.

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2}$$

$\Rightarrow x_1=-1 \wedge x_2=2$.

Probe: $2-\sqrt{2+2}=2-2=0$; $-1-\sqrt{-1+2}=-1-1=-2\neq 0$

$\Rightarrow IL_1=\{2\}$;

2. $e^{2x}-e=0$ **(Exponentialgleichung)**

$$e^{2x}-e=0 \Leftrightarrow e^{2x}=e \Leftrightarrow e^{2x}=e^1 \Leftrightarrow 2x=1 \Rightarrow x_3=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow IL_2=\left\{\frac{1}{2}\right\};$$

$$IL=\left\{\frac{1}{2};2\right\}.$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}x^2-1$. Ihr Schaubild sei K.
Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente an K.

Lösung:

Bestimmung des Wendepunktes:

Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}x^2-1=\frac{1}{2}\cdot x^{-1}+\frac{1}{2}x^2-1$$
$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^{-2}+x=-\frac{1}{2x^2}+x$$
$$f''(x)=x^{-3}+1=\frac{1}{x^3}+1$$
$$f'''(x)=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$$

Notwendige Bedingung:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3}+1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3}=-1 \Leftrightarrow -x^3=1 \Leftrightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=-1\,;$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(-1)=-\frac{3}{(-1)^4}=-3\neq 0\,;$$

Berechnung der *y*-Koordinate des Wendepunkts:

$$f(-1)=\frac{1}{2\cdot(-1)}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=-1$$
$\Rightarrow$ **W (− 1 | − 1)**

Bestimmung der Wendetangente:

$$(t): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow (t):\quad y=f'(-1)\cdot(x+1)+f(-1)$$
$$f'(-1)=-\frac{1}{2\cdot(-1)^2}-1=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}\,;\; f(-1)=-1$$

$$\Rightarrow\quad y=-\frac{3}{2}\cdot(x+1)-1=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-1=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\;\Rightarrow (t):\quad \underline{y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}.$$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x) = 2 \cdot \sqrt{\cos(x)}; \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$**.**
Das Schaubild der Funktion *f* schließt mit der *x*-Achse eine Fläche ein.
Bei Rotation dieser Fläche um die *x*-Achse entsteht ein Drehkörper.
Berechnen Sie dessen Volumen.

Lösung:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{\cos(x)}; \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Nullstelen:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot \sqrt{\cos(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\cos(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow\; x_1 = -\frac{\pi}{2} \wedge x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Volumen:

$$V = \pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 \cdot \sqrt{\cos(x)}\right)^2 dx = 4\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

$$= 4\pi \cdot [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\pi \cdot (1 - (-1)) = 8\pi.$$

$$\Rightarrow\; \underline{V = 8\pi}\,.$$