Vorbereitung für das Abitur

Baden-Württemberg

Test 6

Analytische Geometrie

Aufgabe 1

Zeigen Sie dass die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **und**

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; s, t \in IR$ **windschief sind.**

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$**.**

a) Bestimmen Sie die Gleichung der zu E parallele Ebene F durch den Punkt P(1|4|–5).

b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen der zwei Ebenen.

Aufgabe 3

Gegeben sind die parallelen Geraden *g* und *h*.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene E, die g und *h* enthält, bestimmen kann.

Aufgabe 1

Zeigen Sie dass die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **und**

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; s, t \in IR$ **windschief sind.**

Lösung:

Richtungsvektoren vergleichen:

Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **und** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **der zwei Geraden sind offensichtlich linear unabhängig.**

Die Geraden g und h sind also weder parallel noch identisch.

Gleichsetzen und das LGS lösen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 1+2s=-2+t \\ -2-s=\ 1 \\ 4+s=\ 3+2t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 1+2s=-2+t \\ s=\ -3 \\ 4+s=\ 3+2t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 1+2\cdot(-3)=-2+t \\ s=-3 \\ 4+s=\ 3+2t \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} t=-3 \\ s=-3 \\ 4+s=\ 3+2t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} t=-3 \\ s=-3 \\ 4-3=\ 3+2\cdot(-3) \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} t=-3 \\ s=-3 \\ 1=-3 \end{array} \right|.$$

$t=-3$ **und** $s=-3$ **erfüllen die Gleichung** $4+s=3+2t$ **nicht.**
Das LGS hat also keine Lösungen, d.h. die Geraden g und h haben keinen Schnittpunkt.

Die Geraden g und h sind nicht parallel, nicht identisch, schneiden sich auch nicht, sind also windschief.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene E: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der zu E parallele Ebene F durch den Punkt P(2|4|3).
b) Bestimmen Sie den Abstand zwischen der zwei Ebenen.
Lösung:

a) $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ **ist ein Normalenvektor der Ebene E und somit auch für die zu E parallele Ebene F.**

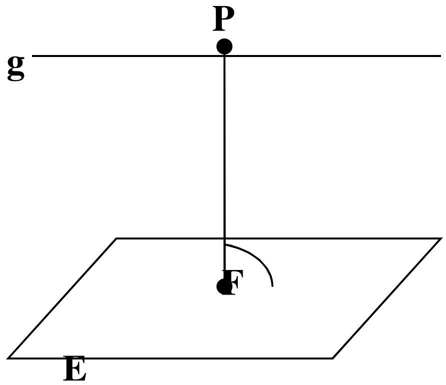
Die Ebene F hat also die Gleichung $3x_1+4x_2-2x_3=b$ **und enthält den Punkt P(2|4|3).**
Punktprobe mit P: $3\cdot 2+4\cdot 4-2\cdot 3=b \Rightarrow b=16 \Rightarrow 3x_1+4x_2-2x_3=16$.

b) Der Abstand zwischen E und F ist gleich den Abstand von Punkt P zu Ebene E.

Die Ebene E in Koordinatenform umwandeln:

$$3x_1+4x_2-2x_3-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 3x_1+4x_2-2x_3=7$$

Die Ebene E in die Hesse` sche Normalform umwandeln:



$$\frac{3x_1+2x_2-4x_3-7}{\sqrt{29}}=0.$$

Den Abstand berechnen:

$$d(E;F)=d(P;E)=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 4-4\cdot 3-7|}{\sqrt{29}}=\frac{|-5|}{\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

Aufgabe 3

Gegeben sind die parallelen Geraden *g* und *h*.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene E, die g und *h* enthält, bestimmen kann.

Lösung:

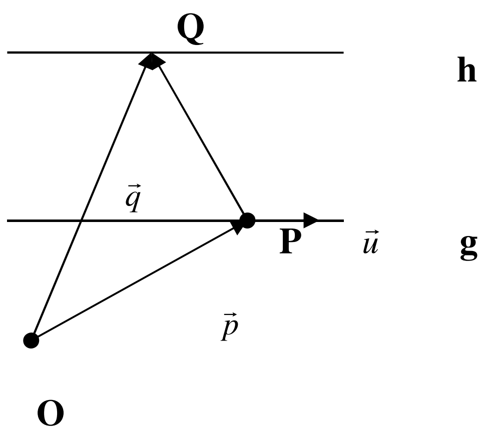
Gegeben sind die parallelen Geraden *g*: $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$ **und *h*:** $\vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$.

Gesucht ist eine Ebene *E*, die die Geraden g und *h* enthält.

Ein Verfahren dafür:

Die Stützpunkte der zwei Geraden sind P und Q.

1. **Den Vektor** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{q} - \vec{p}$ **bestimmen:**



2. **Die Ebene E in Parameterform angeben:**

E: $\underline{\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot (\vec{q} - \vec{p})}$.