Vorbereitung für das Abitur

Baden-Württemberg

Test 7

Analysis und Algebra

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\dfrac{2}{(3x-1)^4}$**.**

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\left(4-\dfrac{3}{4}x\right)^7$**.**

Bestimmen sie die Stammfunktion F von f mit $F(4)=\dfrac{5}{6}$**.**

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$(\sin(x))^2+3\sin(x)+2=0\,;\ x\in[0;\,2\pi]$**.**

Aufgabe 4

Eine erhitzte Flüssigkeit kühlt in sieben Minuten bei einer Umgebungstemperatur von 20°C ab.
Nach zwei Minuten hat eine Temperatur von 53,8°C erreicht.

Finden Sie eine exponentielle Funktion f mit $f(t)=c\cdot e^{k\cdot t}$ **die diesen Vorgang beschreibt (t in Minuten,** $f(t)$ **in °C).**

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{(3x-1)^4}$.

Lösung:

Umformung:

$$f(x)=\frac{2}{(3x-1)^4}=2\cdot(3x-1)^{-4}.$$

Regel: $\boxed{f(x)=u(v(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$

Ableitung:

$$f(x)=2\cdot(-4)\cdot(3x-1)^{-5}\cdot 3=-24\cdot(3x-1)^{-5}=-\frac{24}{(3x-1)^5}.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\left(4-\frac{3}{4}x\right)^7$. Bestimmen sie die Stammfunktion F von f mit $F(4)=\frac{5}{6}$.

Lösung:

Regel:

$f(x)=(ax+b)^n$	$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$

$$F(x)=\frac{1}{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(4-\frac{3}{4}x\right)^8+C=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(4-\frac{3}{4}x\right)^8+C$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\left(4-\frac{3}{4}x\right)^8+C.$$

$$F(4)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}\cdot\left(4-\frac{3}{4}\cdot 4\right)^8+C=\frac{5}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{6}+C=\frac{5}{6}\Leftrightarrow C=1.$$

$$F(x)=-\frac{1}{6}\cdot\left(4-\frac{3}{4}x\right)^8+1.$$

---

www.mathe-nachhilfe-singenhohentwiel.de

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$(\sin(x))^2 + 3\sin(x) + 2 = 0$; $x \in [0;\, 2\pi]$.

Lösung:

Durch die Substitution: $\sin(x) = z$ **wird die Gleichung in eine quadratische Gleichung überführt:** $z^2 + 3z + 2 = 0$.

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{-3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{-3}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

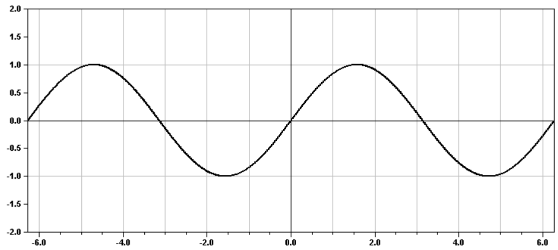
$$\Rightarrow z_1 = -1 \wedge z_2 = -2.$$

Rücksubstitution:

1) $\underline{\sin(x) = -2}$

Es gilt $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ **für alle** $\boldsymbol{x \in IR}$ $\Rightarrow IL_1$ **= { }.**

2) $\underline{\sin(x) = -1}$



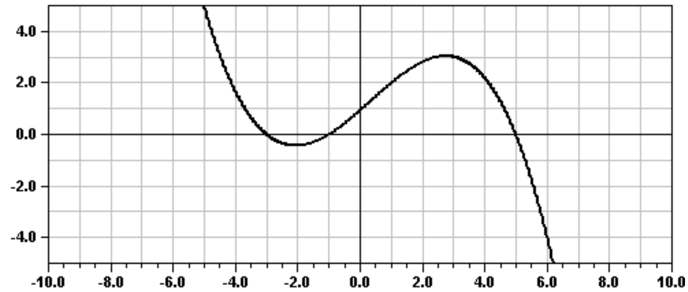
$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow IL_2 = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Lösungsmenge: $IL = IL_1 \cup IL_2 = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

www.mathe-nachhilfe-singenhohentwiel.de

<u>Aufgabe 5</u>

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.



Finden Sie heraus, ob die folgenden Aussagen richtig, falsch oder nicht entscheidbar sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

1) Die Funktion f hat an der Stelle $x = -3$ ein lokales Minimum.
2) Für $-1 < x < 2$ ist das Schaubild von f linksgekrümmt.
3) $f(0) > f(5)$.
4) Das Schaubild von f verläuft durch den Ursprung.
<u>Lösung:</u>

<u>Aussage 1</u>: f hat an der Stelle $x = -3$ ein lokales Minimum.
Diese Aussage ist <u>falsch</u>, denn f' hat an der Stelle $x = -3$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach – und folglich hat das Schaubild von f einen Hochpunkt (lokales Maximum für f) an dieser Stelle.

<u>Aussage 2:</u> Für $-1 < x < 2$ ist das Schaubild von f linksgekrümmt.
Diese Aussage ist <u>wahr</u>, denn das Schaubild von f' hat für $-1 < x < 2$ Tangenten mit positiver Steigung.
D. h. dass die zweite Ableitung in diesem Bereich positiv ist und folglich ist das Schaubild von f linksgekrümmt.

<u>Aussage 3:</u> $f(0) > f(5)$.
Diese Aussage ist <u>falsch</u>, denn f' ist im Intervall (0; 5) positiv und nach den Monotoniesatz ist f streng monoton steigend. Es gilt also $f(0) < f(5)$.

<u>Aussage 4:</u> Das Schaubild von f verläuft durch den Ursprung
Diese Aussage ist <u>unentscheidbar</u>, denn f ist, als Stammfunktion von f', nur bis auf einen konstanten Summanden C bestimmt: $f(x) = \int f'(x)dx + C$.
D.h. das Schaubild von f ist in y-Richtung verschiebbar und somit ist eine Aussage über die Nullstellen von f nicht möglich.

Aufgabe 4

Eine erhitzte Flüssigkeit kühlt in sieben Minuten bei einer Umgebungstemperatur von 20°C ab.
Nach zwei Minuten hat eine Temperatur von 53,8°C erreicht.

Finden Sie eine exponentielle Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ die diesen Vorgang beschreibt (t in Minuten, $f(t)$ in °C).

Lösung:

Die Funktion f ist durch $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$ gegeben.

Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 53{,}8 \\ f(7) = 20 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c \cdot e^{2k} = 53{,}8 \\ c \cdot e^{7k} = 20 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c \cdot e^{2k} = 53{,}8 \\ e^{5k} = \dfrac{20}{53{,}8} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c \cdot e^{2k} = 53{,}8 \\ 5k = \ln\left(\dfrac{20}{53{,}8}\right) \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c \cdot e^{2k} = 53{,}8 \\ k = -0{,}198 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c = 80 \\ k = -0{,}198 \end{array}\right|.$$

Der Funktionsterm lautet:

$$\underline{f(t) = 80 \cdot e^{-0{,}198 \cdot t}}.$$