Trigonometrische Gleichungen

Eigenschaften der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion

Für jede ganze Zahl $k \in$ Z gilt: $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ und
$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$.

Die Sinus- und Kosinusfunktion sind auf *IR* definiert.

Eine Funktion *f* heißt periodisch, wenn es eine Zahl $T \neq 0$ gibt, sodass $f(x + T) = f(x)$ für alle x, $x + T$ aus ihre Definitionsmenge.
Die kleinste positive Zahl T die diese Eigenschaft erweist heißt Periode von *f*.

Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion sind also periodisch mit der Periode $T = 2\pi$.

Die Schaubilder sind folglich verschiebungssymmetrisch.

Aus $\sin(-x) = -\sin x$ folgt, dass das Schaubild der Sinusfunktion symmetrisch zur Ursprung ist.

Aus $\sin x = \sin(\pi - x)$ folgt, dass das Schaubild der Sinusfunktion symmetrisch zur Geraden $x = \frac{1}{2}\pi$ ist.

Aus $\cos(-x) = \cos(x)$ folgt, dass das Schaubild der Kosinusfunktion symmetrisch zur y-Achse ist.

Aus $\cos x = -\cos(\pi - x)$ folgt, dass das Schaubild der Kosinusfunktion symmetrisch zum Punkt $P\left(\frac{1}{2}\pi \middle| 0\right)$ ist.

Es gilt: $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ und $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$.

Die Wertemenge der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion ist jeweils [-1; 1] und der Betrag der Steigungen der Schaubilder ist höchstens 1.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung im Intervall [0; 2π]:
cos *x* = 0,9211.

Lösung:

Mit Hilfe des Taschenrechners ($\cos^{-1}(0.9211)$) bestimmen wir
x_1 = 0,40 (gerundet).

Wegen cos (2π - *x*) = cos *x* ist x_2 = 2π - x_1 = 2·3,14 – 0,40 = 6,28 – 0,40 = 5,88.

$L = \{0{,}4; 5{,}88\}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen:

1. **sin *x* = 0,5;**
2. **cos *x*=0,5.**

Lösung:

1. Mit Hilfe des Taschenrechners bestimmen wir x_1 = 0,53.

Wegen sin (π - *x*) = sin *x* ist x_2 = π - x_1 = 3,14 – 0,53 = 2,61.

$L = \{x | x = 0{,}53 + 2k\pi\} \cup \{x | x = 2{,}61 + 2k\pi\}$**.**

2. Mit Hilfe des Taschenrechners bestimmen wir x_1 = 1,05.

Wegen cos (–*x*) = cos(*x*) folgt $x_2 = -1{,}05$.

$L = \{x | x = -1{,}05 + 2k\pi\} \cup \{x | x = 1{,}05 + 2k\pi\}$**.**

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $\sin(x)\cdot(3-\cos(x))=0,\ x\in[0;2\pi]$.

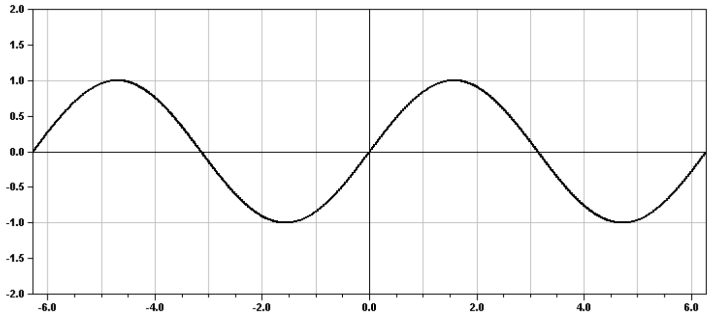
Lösung:

$\sin(x)\cdot(3-\cos(x))=0,\ x\in[0;2\pi]$ ist eine trigonometrische Gleichung.

Satz vom Nullprodukt: $A\cdot B=0\Rightarrow A=0$ **oder** $\boldsymbol{B}$ **= 0**

$\sin(x)\cdot(3-\cos(x))=0 \Rightarrow$ **sin (*x*) = 0 oder 3 – cos (*x*) = 0**

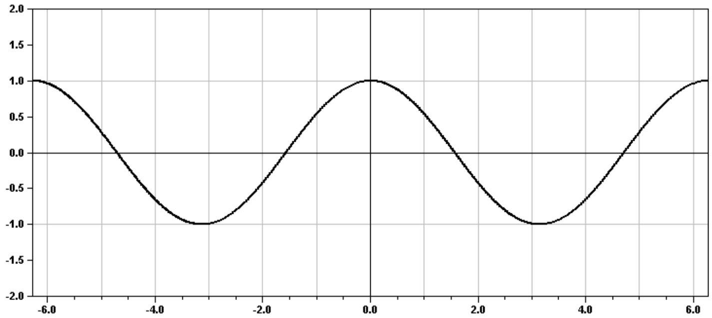
1. $\sin(x)=0$



-

Die Nullstellen der Sinusfunktion im Intervall $[0;2\pi]$ sind:
$x_1=0$, $x_2=\pi$ und $x_3=2\pi \Rightarrow IL_1=\{0;\ \pi;\ 2\pi\}$.

2. $3-\cos(x)=0 \quad \Leftrightarrow \cos x=3$



Diese Gleichung hat keine Lösungen, da $-1\le\cos x\le 1$ für alle $x\in IR$ gilt.
$\Rightarrow IL_2=\{\ \}$.

Lösungsmenge:

$$IL=IL_1\cup IL_2=\{0;\ \pi;\ 2\pi\}.$$

www.mathe-nachhilfe-singenhohentwiel.de

<u>Aufgabe 4</u>

Gegeben ist die Gleichung $4 \cdot \cos^2 x - 1 = 0$**.**
Bestimmen Sie die Lösungen im Intervall [0; 2π):

<u>Lösung:</u>

$$4 \cdot \cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}.$$

Aus $\cos x = \frac{1}{2}$ folgt $x_1 = \frac{\pi}{3}$;

Wegen cos (2π - x) = cos x folgt $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{5\pi}{3}$;

$x_1 = \frac{\pi}{3} \in D = [0;2\pi]$;

$x_3 = \frac{5\pi}{3} \in D = [0;2\pi]$.

Aus $\cos x = -\frac{1}{2}$ folgt $x_3 = -\frac{\pi}{3}$;

$x_3 = -\frac{\pi}{3} \notin D = [0;2\pi]$.

$$\underline{L = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}}.$$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Gleichung $\cos^2 x + 5\cdot\cos x + 4 = 0,\ x\in[-2\pi;2\pi]$.

Lösung:

Durch die Substitution: $\cos x = z$ wird die Gleichung in eine quadratische Gleichung überführt:

$$z^2 + 5z + 4 = 0.$$

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z^2 + 5z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{-5\pm 3}{2}$$

$$z^2 + 5z + 4 = 0$$

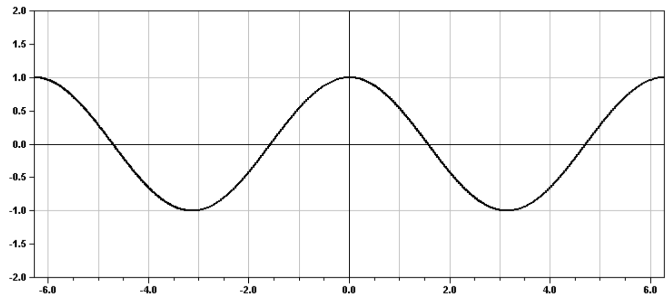
$$z_{1,2} = \frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

$$= \frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{-5}{2} \pm \frac{3}{2} = \frac{-5\pm 3}{2}$$

$\Rightarrow z_1 = -4 \wedge z_2 = -1$.

Rücksubstitution:

1) $\cos x = -4$



Es gilt $-1 \le \cos x \le 1$
für alle $x \in IR$
$\Rightarrow IL_1 = \{\ \}$.

2) $\cos x = -1$

$x_1 = -\pi$ und $x_2 = \pi$.
$\Rightarrow IL_2 = \{-\pi;\pi\}$.

Lösungsmenge: $IL = IL_1 \cup IL_2 = \{-\pi;\pi\}$.

Aufgabe 6

Lösen Sie die Gleichung: $4\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0,\ x \in [0; 2\pi]$.

Lösung:

Substitution: $\sin x = z$

$$4z^2 + 2z - 2 = 0$$

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$. **Normalform:** $x^2 + px + q = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$4z^2 + 2z - 2 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm 6}{8}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \wedge z_2 = -1$.

Rücksubstitution:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$; .

Wegen sin (π - *x*) = sin *x* ist $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow IL_1 = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

2) $\sin x = -1$ $\Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2}$; $IL_2 = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Lösungsmenge: $IL = IL_1 \cup IL_2 = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Aufgabe 7

Lösen Sie die Gleichung: $\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0$, $x \in [0;\pi]$.

Lösung:

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ gilt

$\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Substitution: $\cos x = z$

$$2z^2 + z - 1 = 0$$

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$2z^2 + z - 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \wedge z_2 = -1$.

Rücksubstitution:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}$; $IL_1 = \frac{\pi}{3}$.

2) $\cos x = -1$ $\quad \Rightarrow x_2 = \pi$; $IL_2 = \{\pi\}$.

Lösungsmenge: $IL = IL_1 \cup IL_2 = \{-\pi; \pi\}$.

Aufgabe 8

Gegeben ist die Gleichung $3 \cdot \cos^2 x - 1 = \sin^2 x$**.**
Bestimmen Sie die Lösungen im Intervall [– 2π; 2π):

Lösung:

Aus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ und weiter

$3 \cdot \cos^2 x - 1 = \sin^2 x \Leftrightarrow 3 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 2$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aus $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt $\underline{x_1 = \frac{\pi}{4}}$; Wegen cos (2π - x) = cos x ist $\underline{x_2}$ = 2π - x_1= $\underline{\frac{7\pi}{4}}$;

Aus $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt $\underline{x_3 = -\frac{\pi}{4}}$;Wegen cos (–$x$) = cos(x) folgt $\underline{x_4 = -x_2 = -\frac{7\pi}{4}}$;

Wegen cos (π+x) = – cos x ist $\underline{x_5}$= – (π + x_1)= $\underline{-\frac{5\pi}{4}}$;

Wegen cos (π+x) = – cos x ist $\underline{x_6}$= – (π + x_4)= $\underline{\frac{3\pi}{4}}$;

Wegen cos (–x) = cos(x) folgt $\underline{x_7 = -x_5 = \frac{5\pi}{4}}$;

Wegen cos (–x) = cos(x) folgt $\underline{x_8 = -x_6 = -\frac{3\pi}{4}}$;

$$\underline{L = \left\{ -\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}}.$$