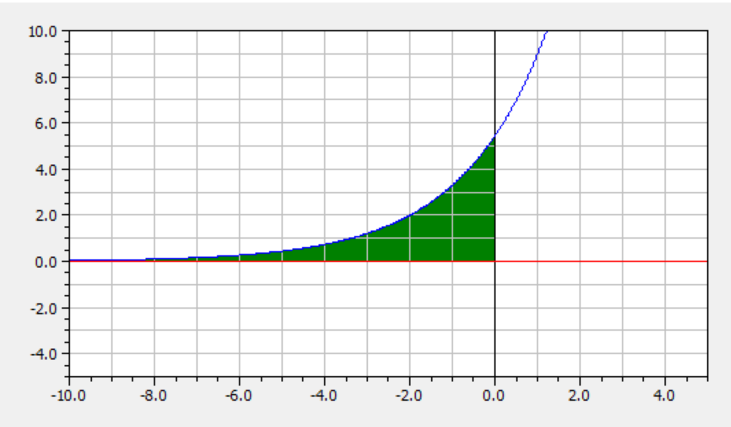
Uneigentliches Integral

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die vom Schaubild von f mit $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x+1}$ und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty;0]$ begrenzte, „ins Unendliche reichende" Fläche einen Flächeninhalt A besitzt.

Geben Sie gegebenenfalls A an.

Lösung:



Für $a < 0$ gilt:

$$A(a) = \int_a^0 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x+1}\,dx = \left[2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x+1} \right]_a^0 .$$

$$= \left[4 \cdot e^{\frac{1}{2}x+1} \right]_a^0 = 4 \cdot e - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}a+1}.$$

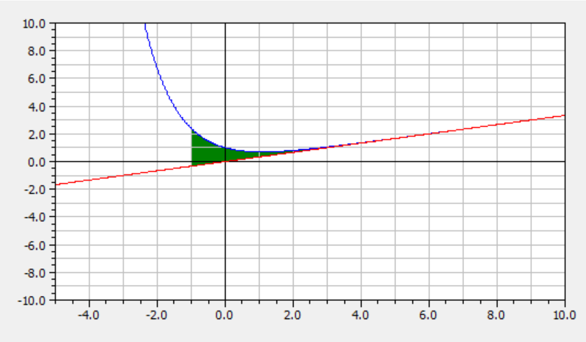
Für $a \to -\infty$ **strebt** $A(a) \to 4e$ **:**

$$A = \lim_{a\to-\infty} \left(4e - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}a+1} \right) = 4e - 0 = 4e.$$

Die nach links ins Unendliche reichende Fläche hat den Inhalt A =4*e*.

Aufgabe 2

Die Gerade mit der Gleichung $x = -1$, das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x + e^{-x}$ und die Asymptote $y = \frac{1}{3}x$ begrenzen eine nach rechts unbeschränkte Fläche.



Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen Flächeninhalt A hat.
Geben Sie gegebenenfalls A an.

Lösung:

Für $b > 0$ ist

$$A(b) = \int_{-1}^{b} \left(f(x) - \frac{1}{3}x \right) dx = \int_{-1}^{b} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x} \right]_{-1}^{b}$$

$$= -e^{-b} - (-e^{1}) = e - e^{-b}.$$

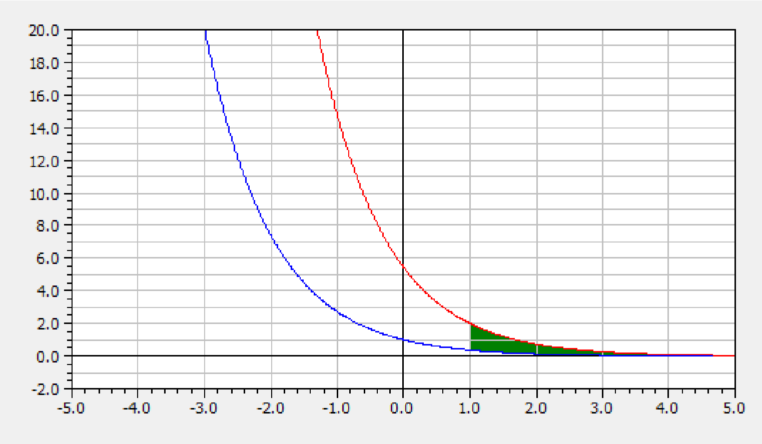
Für $b \to \infty$ **strebt** $A(b) \to e$**:**

$$A = \lim_{b \to \infty} \left(e - e^{-b} \right) = e - 0 = e \cong 2{,}72.$$

Die nach rechts unbeschränkte Fläche hat den Inhalt A = *e*.

Aufgabe 3

Die Schaubilder der Funktionen *f* und *g* mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = 2 \cdot e^{1-x}$ sowie die Geraden mit der Gleichungen *x* = 1 und *x* = z mit z > 1 schließen eine Fläche ein.



Bestimmen Sie den Inhalt A(z) dieser Fläche sowie den Grenzwert $A = \lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.

Lösung:

Für z > 1 gilt:

$$A(z) = \int_1^z (g(x) - f(x))dx = \int_1^z (2 \cdot e^{1-x} - e^{-x})dx = \left[-2 \cdot e^{1-x} + e^{-x}\right]_1^z$$

$$= \left(-2 \cdot e^{1-z} + e^{-z}\right) - \left(-2 \cdot e^{0} + e^{-1}\right)$$

$$= e^{-z} - 2 \cdot e^{1-z} + 2 - \frac{1}{e}.$$

$$A = \lim_{z \to \infty} A(z) = \lim_{z \to \infty}\left(e^{-z} - 2 \cdot e^{1-z} + 2 - \frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e}.$$

Die nach rechts unbeschränkte Fläche hat den Inhalt

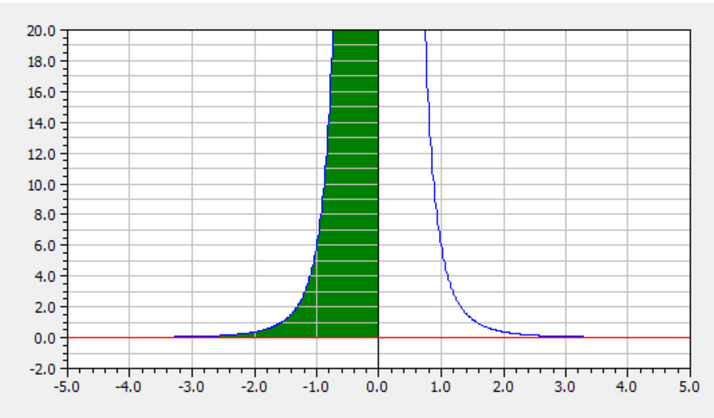
$$\underline{A = 2 - \frac{1}{e}}.$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die vom Schaubild von f mit $f(x)=\frac{6}{x^4}$, den Geraden mit den Gleichungen $x = -3$ und $x = 0$ sowie der x-Achse begrenzte und „oben ins Unendliche reichende“ Fläche einen Flächeninhalt A besitzt.

Geben Sie gegebenenfalls A an.

Lösung:



Für $-3 < x < 0$ gilt:

$$A(b)=\int_{-3}^{b}\frac{6}{x^4}\,dx=\int_{-3}^{b}6\cdot x^{-4}dx=\left[6\cdot\frac{1}{-3}x^{-3}\right]_{-3}^{b}$$

$$=\left[-\frac{2}{x^3}\right]_{-3}^{b}=-\frac{2}{b^3}-\frac{2}{27}.$$

Für $b\to 0$ **strebt** $A(b)\to-\infty$**.**

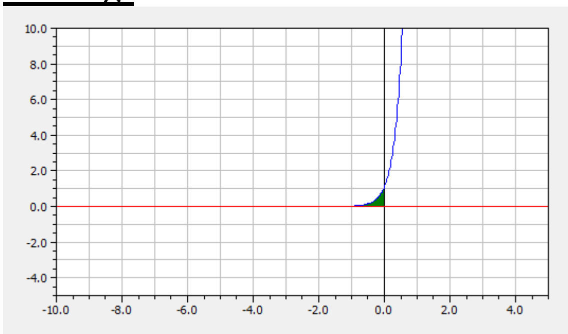
$$\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2}{b^3}-\frac{2}{27}\right)=-\infty\,.$$

Die nach oben ins Unendliche reichende Fläche hat <u>keinen endlichen Inhalt</u>.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=3e^{4x-1}$. Ihr Schaubild sei *K*.
Die Kurve *K* begrenzt zusammen mit der *x*-Achse (*x* < 0) und der Geraden *x* = - *a* (*a* > 0) eine Fläche A_a. Berechnen Sie $\lim\limits_{a\to\infty} A_a$.

Lösung:



$$A_a = \int_{-a}^{0} 3e^{4x-1}dx = \left[3\cdot\frac{1}{4}e^{4x-1}\right]_{-a}^{0}$$

$$=\left(\frac{3}{4}e^{-1}\right)-\left(\frac{3}{4}e^{-4a-1}\right)=\frac{3}{4e}-\frac{3}{4}e^{-4a-1}.$$

$$\mathbf{A=}\lim_{a\to\infty} A_a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{3}{4e}-\frac{3}{4}e^{-4a-1}\right)=\frac{3}{4e}.$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} e^{-2x+1}dx$.

Skizzieren Sie die Fläche die diesen Inhalt hat.

Lösung:

$$\mathbf{A=}\int_0^{\infty} e^{-2x+1}dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+1}\right]_0^{\infty} = 0-\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{1}\right)=\frac{e}{2}.$$