Wendepunkte

Notwendige Bedingung: $f''(x_0) = 0$
Hinreichende Bedingung: $f'''(x_0) \neq 0$ **oder Vorzeichenwechsel von** f'' **an der Stelle** x_0**.**

Für $f'''(x_0) > 0$ **gibt es einen Wechsel von Rechtskurve in Linkskurve.**
Für $f'''(x_0) < 0$ **gibt es einen Wechsel von Linkskurve in Rechtskurve.**

Beispiel 1

Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - 1$**. Ihr Schaubild sei K. Bestimmen Sie den Wendepunkt von K.**

Lösung:

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = \frac{1}{2} \cdot x^{-1} + \frac{1}{2}x^2 - 1$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2} + x = -\frac{1}{2x^2} + x$$
$$f''(x) = x^{-3} + 1 = \frac{1}{x^3} + 1$$
$$f'''(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Notwendige Bedingung:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = -1 \Leftrightarrow -x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1;$$

Hinreichende Bedingung:

$$f'''(-1) = -\frac{3}{(-1)^4} = -3 \neq 0;$$

Berechnung der *y*-Koordinate des Wendepunkts:

$$f(-1) = \frac{1}{2 \cdot (-1)} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = -1 \quad \Rightarrow$$ **W (– 1 | – 1).**

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f_t durch $f_t(x)=(2x-t)\cdot e^{\frac{x}{t}}\,;\,t>0$.
Ihr Schaubild ist K_t.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W_t.

Lösung:

Ableitungen:

$$f_t'(x)=2\cdot e^{\frac{x}{t}}+(2x-t)\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{x}{t}}=\left(2+\frac{2x}{t}-1\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}=\left(1+\frac{2x}{t}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}.$$

$$f_t''(x)=\frac{2}{t}\cdot e^{\frac{x}{t}}+\left(1+\frac{2x}{t}\right)\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{x}{t}}=\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{t}+\frac{2x}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}=\left(\frac{3}{t}+\frac{2x}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}.$$

Notwendige Bedingung:

$$f_t''(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{t}+\frac{2x}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{t}}=0\Leftrightarrow\frac{3}{t}+\frac{2x}{t^2}=0\,\Big|\cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow 3t+2x=0\Leftrightarrow 2x=-3t\Leftrightarrow x_w=-\frac{3}{2}\cdot t.$$

Hinreichende Bedingung (Vorzeichenwechsel):

$$f_t''(-2t)=\left(\frac{3}{t}-\frac{4t}{t^2}\right)\cdot e^{-1}=-\frac{1}{t\cdot e}<0\,;$$

$$f_t''(0)=\left(\frac{3}{t}-0\right)\cdot e^{0}=\frac{3}{t}>0.$$

$$y_W=f_t(x_W)=\left(2\cdot\left(-\frac{3}{2}\cdot t\right)-t\right)\cdot e^{-\frac{3}{2}}=(-3t-t)\cdot e^{-\frac{3}{2}}=-4t\cdot e^{-\frac{3}{2}}=-\frac{4}{\sqrt{e^3}}\cdot t$$

$$\Rightarrow \underline{W\left(-\frac{3}{2}\cdot t\,\Big|\,-\frac{4}{\sqrt{e^3}}\cdot t\right)}.$$