Vorbereitung für das Abitur

Baden-Württemberg

Test2

Analytische Geometrie

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte A $(-1|2|0)$, B $(-1|0|1)$ und C $(-1|0|0)$.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Das Dreieck ABC bildet mit dem Punkt S $(2|0|0)$ als Spitze eine Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **und h:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s, t \in IR$.

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Aufgabe 3

Die Punkte A $(2|0|4)$, B $(3|0|-2)$ und C $(2|5|-2)$ liegen in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
Bestimmen Sie daraus eine Gleichung in Normalenform.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte A (–1|2|0), B (–1|0|1) und C (–1|0|0).
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
Das Dreieck ABC bildet mit dem Punkt S (2|0|0) als Spitze eine Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

Lösung:

Beweis der Rechtwinkligkeit des Dreiecks ABC:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}}$$

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABC:

$$\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0 + (-2)^2 + 0} = 2.$$

$$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0 + 0 + (-1)^2} = 1.$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

Berechnung des Pyramidenvolumens:

Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in einer Ebene, die zur x_2x_3 - Ebene parallel ist.
Die Strecke $\overline{SC}$ ist daher orthogonal zur Ebene durch A, B und C, hat die Länge 3 und entspricht der Höhe der Pyramide.

$$\underline{V = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot \overline{SC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1.}$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **und h:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s, t \in IR$.

Lösung:

Vergleichen der Richtungsvektoren:

Die Richtungsvektoren sind offensichtlich nicht linear abhängig (sind keine Vielfache voneinander).
Die Geraden sind also weder parallel noch identisch.

Gleichsetzen und das LGS lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 2 + 2s = 10 + 2t \\ 1 - \quad s = \quad 2 \quad \\ 3s = \quad 2 + \quad t \end{array} \right|$$

Das LGS hat drei Gleichungen und zwei Unbekannte.
Aus zwei der drei Gleichungen werden *s* und *t* bestimmt.

$$\left. \begin{array}{r} 2 + 2s = 10 + 2t \\ 1 - \quad s = \quad 2 \quad \\ 3s = \quad 2 + \quad t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{r} 2 + 2s = 10 + 2t \\ s = -1 \\ t = -5 \end{array} \right|$$

***s* = – 1 und *t* = – 5 erfüllen die verbleibende Gleichung ($2 + 2s = 10 + 2t$):**

$$2 + 2 \cdot (-1) = 10 + 2 \cdot (-5) \Leftrightarrow \mathbf{2 - 2 = 10 - 10} \Leftrightarrow \mathbf{0 = 0} \quad \Rightarrow \left. \begin{array}{r} s = -1 \\ t = -5 \\ 0 = 0 \end{array} \right|$$

Es gibt also eine eindeutige Lösung des LGS, d.h. <u>die Geraden *g* und *h* schneiden sich.</u>

Berechnung des Ortsvektors des Schnittspunktes:

s = – 1 wird in die entsprechende Geradengleichung eingesetzt.

$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. **<u>Schnittpunkt :</u>** **<u>S (0|2|–3).</u>**

Aufgabe 3

Die Punkte A (2|0|4), B (3|0|–2) und C (2|5|–2) liegen in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
Bestimmen Sie daraus eine Gleichung in Normalenform.

Lösung:

Bestimmung einer Parametergleichung der Ebene E:

E: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \Leftrightarrow$ **E:** $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \textbf{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung eines Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E :

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot (-6) = 0 \Rightarrow n_1 - 6n_3 = 0$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1 \cdot 0 + n_2 \cdot 5 + n_3 \cdot (-6) = 0 \Rightarrow 5n_2 - 6n_3 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} n_1 - 6n_3 &= 0 \\ 5n_2 - 6n_3 &= 0 \end{aligned} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} n_1 &= 6n_3 \\ n_2 &= \frac{6}{5} n_3 \end{aligned} \right|; \quad \textbf{Für } n_3 = 5 \textbf{ folgt } \vec{n} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E:

$30x_1 + 6x_2 + 5x_3 = d$

$30 \cdot 2 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = d \Rightarrow$ ***d* = 80 (Stützpunkt A (2|0|4) eingesetzt)**

$\Rightarrow$ **E :** $\underline{30x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 80}$.

Umwandlung der Ebenengleichung in Normalenform:

$$\textbf{E: } (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{E: } \underline{\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 0}.$$