Vorbereitung für das Abitur
Baden-Württemberg

Test3

Analysis und Algebra

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x+1) \cdot \cos(2x-1)$**.**

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit
$f(x) = 4 \cdot (2-0{,}5x)^3 - \frac{1}{x}$**.**

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 6e^{2x} + 9 = 0$**.**

Aufgabe 4

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 5

Der Temperaturverlauf während eines Tages kann durch eine Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8)\right] + 5;\ \ 0 \le x \le 24$
beschrieben werden (x in Stunden, f(x) in °C).

Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur zwischen 10 und 20 Uhr.

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=(2x+1)\cdot\cos(2x-1)$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Lösung:

Produktregel:

$f(x)=u(x)\cdot v(x)$	$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Kettenregel:

$$\boxed{f(x)=u(v(x)) \quad\rightarrow\quad f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Ableitung:

$$f'(x)=2\cdot\cos(2x-1)+(2x+1)\cdot\cdot(-2\cdot\sin(2x-1))$$
$$=2\cdot\cos(2x-1)-2\cdot(2x+1)\cdot\sin(2x-1).$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit
$f(x)=4\cdot(2-0{,}5x)^3-\frac{1}{x}$.

Lösung:

Regeln:

$f(x)=(ax+b)^n$	$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$

$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C$

Stammfunktion:

$$F(x)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-0{,}5}\cdot(2-0{,}5x)^4-\ln\lvert x\rvert$$
$$=-2\cdot(2-0{,}5x)^4-\ln\lvert x\rvert.$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 6e^{2x} + 9 = 0$**.**

Lösung:

$$e^{4x} - 6e^{2x} + 9 = 0$$

Substitution: $e^{2x} = z$**.**

$$z^2 - 6z + 9 = 0$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$\Rightarrow z = 3$$

Rücksubstitution:

$$e^{2x} = 3$$

$$\Rightarrow 2x = \ln 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}.$$

Lösungsmenge:

$$IL = \left\{ \ln\sqrt{3} \right\}.$$

Aufgabe 4

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$

$4x_1 + x_2 + x_3 = 10$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Lösung:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 - 2t \\ 3x_1 + x_3 &= 10 - t \\ x_2 &= t \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &| \cdot (-1) \\ &\lrcorner \oplus \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 - 2t \\ 2x_1 &= 8 + t \\ x_2 &= t \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 - 2t \\ x_1 &= 4 + 0{,}5t \\ x_2 &= t \end{aligned}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 - 2t \\ 4 + 0{,}5t + x_3 &= 2 - 2t \\ x_2 &= t \end{aligned}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 4 + 0.5t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= -2 - 2{,}5t \end{aligned}\right|$$

Lösungsmenge:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 0{,}5t \\ t \\ -2 - 2{,}5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Interpretation:

Die Lösungsmenge stellt die Schnittgerade der drei Ebenen, die durch die Gleichungen des LGS dargestellt sind.

Aufgabe 5

Der Temperaturverlauf während eines Tages kann durch eine Funktion *f* mit $f(x)=5\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8)\right]+5;\ \ 0\le x\le 24$
beschrieben werden (*x* in Stunden, *f*(x) in °C).

Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur zwischen 10 und 20 Uhr.

Lösung:

$$m=\frac{1}{10}\cdot\int_{10}^{20}\left(\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8)\right]+10\right)dx=\frac{1}{10}\cdot\left[-\frac{12}{\pi}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8)\right]+10x\right]_{10}^{20}$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left[-\frac{12}{\pi}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(20-8)\right]+10\cdot 20+\frac{12}{\pi}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(10-8)\right]-10\cdot 10\right]=13{,}56.$$

Die durchschnittliche Temperatur zwischen 10 und 20 Uhr beträgt ca. 13,56 °C.