LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Lineare Gleichungssysteme aus 2 Gleichungen im 2 Variablen werden mit

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
gelöst.

Äquivalente Umformungen sind:

- **Vertauschen der Gleichungen;**
- **Gleichung mit einer Zahl multiplizieren;**
- **Addieren zweier Gleichungen (oder deren Vielfachen).**

Additionsverfahren:

- die Gleichungen werden umgeformt, sodass ein Koeffizient der ersten Gleichung und der entsprechende Koeffizient der zweiten Gleichung Gegenzahlen sind; die zweite Gleichung wird durch die „Summe“ beider Gleichungen ersetzt; aus der Stufenform wird die Lösung bestimmt.

Lineare Gleichungssysteme aus 3 Gleichungen in 3 Variablen

Gauß`sches Lösungsverfahren:

- das LGS wird durch äquivalente Umformungen auf Stufenform gebracht:
- die erste Gleichung bleibt, in die anderen zwei wird eine Variable eliminiert;
- die ersten zwei Gleichungen bleiben, aus der zweiten und dritten wird dieselbe Variable eliminiert. Das LGS hat Stufenform.
- die letzte Gleichung wird gelöst;
- die anderen Variablen werden durch einsetzen in die oberen Gleichungen, schrittweise bestimmt-

Aufgabe 1

Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x + y = \frac{5}{6} \\ y + \frac{3}{2}x = \frac{7}{4} \end{array}\right|.$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x + y = \frac{5}{6} \\ y + \frac{3}{2}x = \frac{7}{4} \end{array}\right| \begin{array}{l} |\cdot 6 \\ |\cdot 4 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 5 \\ 6x + 4y = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} |\cdot(-3) \\ \lrcorner\oplus \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 5 \\ -14y = -8 \end{array}\right| \; |:14 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 6y = 5 \\ y = \frac{4}{7} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + \frac{24}{7} = 5 \\ y = \frac{4}{7} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = \frac{11}{14} \\ y = \frac{4}{7} \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \underline{IL = \left\{\left(\frac{11}{14}; \frac{4}{7}\right)\right\}}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left.\begin{array}{l} (\pi + 3)\cdot x + \quad y = \quad 2\pi \\ (3 - \pi)\cdot x + 2y \; = \pi - 3 \end{array}\right|.$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{l} (\pi + 3)\cdot x + \quad y = \quad 2\pi \\ (3 - \pi)\cdot x + 2y \; = \pi - 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \lrcorner \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (\pi + 3)\cdot x + y = \qquad 2\pi \\ (-3\pi - 3)\cdot x \qquad = -3\pi - 3 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} (\pi + 3)\cdot x + \quad y = 2\pi \\ x = \quad 1 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = \qquad 1 \\ y = \pi - 3 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \underline{IL = \{(1; \pi - 3)\}}.$$

Aufgabe 3

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + \quad x_3 &= 14 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= \ \ 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 13 \end{aligned}\right|$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + \quad x_3 &= 14 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= \ \ 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 13 \end{aligned}\right| \begin{matrix} \cdot(-2) & \quad \Big| \cdot (-1) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + \quad x_3 &= \ \ 14 \\ x_2 - 6x_3 &= -22 \\ 2x_2 - 3x_3 &= \ -1 \end{aligned}\right| \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + \quad x_3 &= \ \ 14 \\ x_2 - 6x_3 &= -22 \\ 9x_3 &= -45 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5;\ x_2 = 8;\ x_1 = 17.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{IL = \{(17;8;5)\}}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7\,.$$

Lösung:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$$

$$x_3 = k\,;$$
$$x_2 = t \quad ;$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 3t + k = 7 \Leftrightarrow 2x_1 = 7 - 3k - t$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{7 - 3k - t}{2}.$$

$$\underline{\Rightarrow IL = \left\{ \frac{7 - 3k - t}{2} ; t ; k \right\}}\,.$$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie das folgende lineare System auf Lösbarkeit:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{array}\right| .$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \cdot 1 \quad | \cdot 1 \\ \cdot(-2) \hookleftarrow \\ \cdot 2 \hookleftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 5x_3 &= -3 \\ 3x_2 - x_3 &= -1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 5x_3 &= -3 \\ -16x_3 &= -10 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{5}{8};$$

$$-x_2 - 5 \cdot \frac{5}{8} = -3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{8};$$

$$2x_1 - \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{8} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \underline{IL = \left\{\frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right\}}.$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 &= 14 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 6 \end{array}\right| .$$

Lösung:

Das LGS $\left.\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 &= 14 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 6 \end{array}\right|$ **hat zwei Gleichungen und drei Variablen.**

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 &= 14 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 &= 14 \\ x_1 \qquad - 5x_3 &= -8 \end{array}\right|$$

$\underline{x_3 = t}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + t &= 14 \\ x_1 \qquad - 5t &= -8 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} x_1 &= -8 + 5t \\ -8 + 5t - x_2 + t &= 14 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} x_1 &= -8 + 5t \\ x_2 &= -22 + 6t \\ x_3 &= t \end{array}\right| .$$

Lösungsmenge:

$$\underline{IL = \{(-8 + 5t; -22 + 6t; t) \mid t \in IR\}.}$$

Es gibt unendlich viele Lösung

Aufgabe 7

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l|}
x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\
x_1 - x_2 + x_3 = 4
\end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{l|l|l}
x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 & \cdot(-1) & \cdot(-1) \\
x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 & \oplus & \oplus \\
x_1 - x_2 + x_3 = 4 & &
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l|}
x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\
\quad -2x_2 + x_3 = -5 \\
\quad -4x_2 = -10
\end{array}$$

$\Rightarrow x_2 = 2{,}5$**;**

In die zweite Gleichung einsetzen:

$-2 \cdot 2{,}5 + x_3 = -5$

;

$\Rightarrow x_3 = 0$

In die erste Gleichung einsetzen:

$x_1 + 3 \cdot 2{,}5 + 0 = 14$

$\Rightarrow x_1 = 6{,}5$

$\Rightarrow \underline{IL = \{(6{,}5;\ 2{,}5;\ 0)\}}$**.**

Aufgabe 8

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a - 2b + c &= 0 \\ -a + b &= 0 \\ 4a + b + c &= 6 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} a - 2b + c &= 0 \\ -a + b &= 0 \\ 4a + b + c &= 6 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &|\cdot(-1) \\ & \\ &\hookleftarrow\oplus \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a - 2b + c &= 0 \\ -a + b &= 0 \\ 3a + 3b &= 6 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} & \\ & \\ &|:3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a - 2b + c &= 0 \\ -a + b &= 0 \\ a + b &= 2 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} & \\ & \\ &\hookleftarrow\oplus \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a - 2b + c &= 0 \\ -a + b &= 0 \\ 2a &= 2 \end{aligned}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= 1 \end{aligned}\right|$$

$$\Rightarrow \underline{IL = \{(1;1;1)\}}.$$

Aufgabe 9

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
a - 2b + c &= 2 \\
4a + b + c &= 10
\end{aligned}
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
a - 2b + c &= 2 \\
3a + b + c &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}
a + c &= 2 - 2t \\
3a + c &= 10 - t \\
b &= t
\end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &|\cdot(-1) \\ &\lrcorner\oplus \end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}
a + c &= 2 - 2t \\
2a &= 8 + t \\
b &= t
\end{aligned}\right|
$$

$$
\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}
a + c &= 2 - 2t \\
a &= 4 + 0{,}5t \\
b &= t
\end{aligned}\right|
$$

$$
\Leftrightarrow \left.\begin{aligned}
a &= 4 + 0.5t \\
b &= t \\
c &= -2 - 2{,}5t
\end{aligned}\right|
$$

$$
\Rightarrow \underline{IL = \{(4 + 0{,}5t;\ t;\ -2 - 2{,}5t) \mid t \in \Re\}}.
$$

Aufgabe 10

Lösen Sie das Gleichungssystem: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10$**.**

Lösung:

$x_3 = s$ **;**

$x_2 = r$ **;**

$\Rightarrow x_1 + 2r - 3s = 10$

$\Leftrightarrow x_1 = 10 - 2r + 3s.$

$\Rightarrow \underline{IL = \{(10 - 2r + 3s; r; s) | r, s \in \Re\}}$**.**