Pflichtteil 2

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\left(1-\cos^3(x)\right)^2$**.**

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\sin(2x-1)$ **an.**

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $\sin(x)\cdot(3-\cos(x))=0,\ x\in[0;2\pi]$**.**

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2x}+2x$**. Ihr Schaubild sei *K*.**
Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen im Punkt $P\left(1\,|\,f(1)\right)$ **.**

Aufgabe 5

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{array}\right|$$

. Deuten Sie die Lösung geometrisch.

Aufgabe 6

Gegeben sind drei Punkte A, B und C im Raum.
Das Dreieck ABC rotiert um die Seite AB.
Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man das Volumen des entstehenden Doppelkegels berechnet.

Aufgabe 7

Ein Fußballspieler trifft beim Elfmeterschießen mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%.
Er schießt sechs Elfmeter.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er alle Elfmeter?
Formulieren Sie die Ereignisse A und B, so dass gilt:

$P(A)=1-0{,}25^6-\binom{6}{1}\cdot 0{,}75^1\cdot 0{,}25^5$**;** $P(B)=0{,}75^3\cdot 0{,}25^3$**.**

Aufgabe 1

Lösung:

Regeln:

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

$$\boxed{f(x) = \cos(x) \;\longrightarrow\; f'(x) = -\sin(x)}$$

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \;\longrightarrow\; f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

Ableitung:

$$f(x) = \left(1-\cos^3(x)\right)^2$$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(1-\cos^3(x)\right) \cdot (-3) \cdot \cos^2(x) \cdot \left(-\sin(x)\right) = 6 \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \left(1-\cos^3(x)\right).$$

$$f'(x) = 6 \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \left(1-\cos^3(x)\right).$$

Aufgabe 2

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x-1)$$

Regeln:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{ax+b} \quad \longrightarrow \quad F(x) = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C}$$

$$\boxed{f(x) = \sin(ax+b) \quad \longrightarrow \quad F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C}$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cdot \cos(2x-1) = \ln|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \cos(2x-1).$$

$$\underline{F(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{4} \cdot \cos(2x-1).}$$

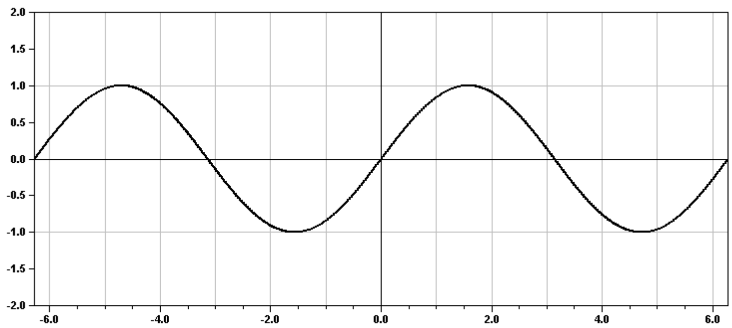
Aufgabe 3

Lösung:

Satz vom Nullprodukt: $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ **oder** $\boldsymbol{B = 0}$

$\sin(x) \cdot (3 - \cos(x)) = 0 \Rightarrow$ **sin (*x*) = 0 oder 3 – cos (*x*) = 0**

1. $\sin(x) = 0$



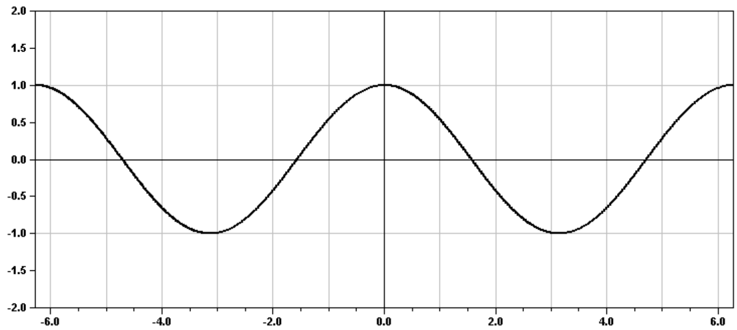
Die Nullstellen der Sinusfunktion im Intervall $[0;2\pi]$ **sind:**

$x_1 = 0$**,** $x_2 = \pi$ **und** $x_3 = 2\pi$**.**

$\Rightarrow \; IL_1 = \{0;\ \pi;\ 2\pi\}$**.**

2. $3 - \cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 3$



Diese Gleichung hat keine Lösungen, da $-1 \le \cos x \le 1$ **für alle *x* ∈ *IR* gilt.**

$\Rightarrow \; IL_2 = \{\ \}$**.**

Lösungsmenge: $IL = IL_1 \cup IL_2 = \{0;\ \pi;\ 2\pi\}$**.**

Aufgabe 4

Lösung:

Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x)=\frac{1}{2x}+2x$ **und** $P\left(1\middle|f(1)\right)$**.**

Ableitung:

$$f'(x)=.\frac{1}{2x^2}+2\textbf{.}$$

Bestimmung der Normalengleichung:

Die Gleichung der Normalen in einem Punkt $P\left(x_0\middle|f(x_0)\right)$ **lautet:**

$$(n):\ y=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\textbf{.}$$

Für die Stelle $x_0=1$ **gilt:** $(n):\ y=-\frac{1}{f'(1)}\cdot(x-1)+f(1)$**.**

Es gilt weiter: $f'(1)=.\frac{1}{2\cdot 1^2}+2\cdot 1=\frac{5}{2}$ **und**

$$f(1)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}\textbf{.}$$

Es folgt:

$$y=-\frac{1}{\frac{5}{2}}\cdot(x-1)+\frac{5}{2}=-\frac{2}{5}\cdot(x-1)+\frac{5}{2}$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot x+\frac{2}{5}+\frac{5}{2}$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot x+\frac{29}{10}$$

$$\Rightarrow\ (n):\ \underline{y=-\frac{2}{5}\cdot x+\frac{29}{10}}\textbf{.}$$

Aufgabe 5

Lösung:

Zu lösen ist das LGS: $\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right|$.

Gauß\` sches Lösungsverfahren:

Das LGS wird durch äquivalente Umformungen (Vertauschen der Gleichungen, Gleichung mit einer Zahl multiplizieren, addieren zweier Gleichungen oder deren vielfachen) auf Stufenform gebracht.
Die erste Gleichung bleibt, in den anderen zwei Gleichungen wird dieselbe

Variable eliminiert: $\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right| \begin{matrix} \cdot 1 \;|\; \cdot 1 \\ \cdot(-2)\hookleftarrow \\ \cdot 2\hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 5x_3 &= -3 \\ 3x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right|$

Die ersten zwei Gleichungen bleiben, aus der zweiten und dritten Gleichung wird eine Variable eliminiert; das LGS liegt in Stufenform vor:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 5x_3 &= -3 \\ 3x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}\right| \begin{matrix} \\ \cdot 3 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_2 - 5x_3 &= -3 \\ -16x_3 &= -10 \end{aligned}\right|$$

Die letzte Gleichung wird gelöst: $\Rightarrow x_3 = \frac{5}{8}$**;**

Die anderen Variablen werden durch einsetzen in die oberen Gleichungen, schrittweise bestimmt:

$$-x_2 - 5\cdot\frac{5}{8} = -3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{8};$$

$$2x_1 - \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{8} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{8}$$

Die Lösungsmenge: $\underline{IL = \left\{\frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right\}}$.

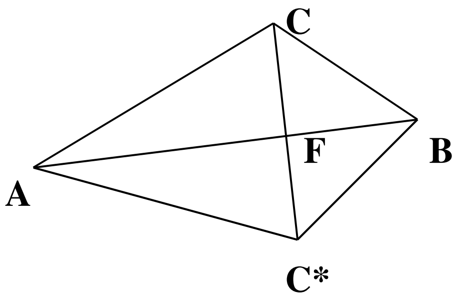
Die geometrische Deutung:

Die drei Gleichungen stellen jeweils eine Ebene in Koordinatenform dar. Es gibt eine eindeutige Lösung, d. h. die drei Ebenen haben einen gemeinsamen Punkt S $\left(\frac{1}{8}\middle| -\frac{1}{8}\middle|\frac{5}{8}\right)$.

Aufgabe 6

Lösung:

Das Dreieck ABC rotiert um die Seite AB.



Das Volumen des entstehenden Doppelkegels kann man mit dem folgenden Verfahren berechnen:

1) Bestimmung des Lotfußpunktes F:

- Die Gerade g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ **durch A und B aufstellen;**
- Die Hilfsebene H durch C, orthogonal auf der Geraden g bestimmen;
Der Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor $\vec{n}$ **für H.**

F ist der Schnittpunkt der Ebene H mit der Geraden g.

2) Berechnung des Vektors $\overrightarrow{CF}$ **und dessen Länge:**

Die zwei Teilkegel haben den gemeinsamen Radius $r = \left|\overrightarrow{CF}\right|$**.**

3) Berechnung des Vektors $\overrightarrow{AF}$ **und dessen Länge:**

Der Kegel mit der Spitze in A hat die Höhe $h_1 = \left|\overrightarrow{AF}\right|$**.**

4) Berechnung des Vektors $\overrightarrow{BF}$ **und dessen Länge:**

Der Kegel mit der Spitze in B hat die Höhe $h_2 = \left|\overrightarrow{BF}\right|$**.**

5) Das Volumen ausrechnen:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (h_1 + h_2).$$

Aufgabe 7

Lösung:

Ein Fußballspieler trifft beim Elfmeterschießen mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%.
Er schießt sechs Elfmeter.

Der Fußballspieler verwandelt alle Elfmeter mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = 0{,}75^6 = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{4096}.$$

Für $P(A) = 1 - 0{,}25^6 - \binom{6}{1} \cdot 0{,}75^1 \cdot 0{,}25^5$ **lautet dasEreignis A:**

Der Fußballspieler verwandelt mindestens drei Elfmeter.

Für $P(B) = 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^3$ **lautet das Ereignis B:**

Der Fußballspieler verwandelt nur die ersten drei Elfmeter.