Pflichtteil 4 (ABG_BW)

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion *f* mit $f(x)=\frac{5}{x^3-8}$**.**

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{x^3}+\cos(2x)$ **an.**

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x}-10e^{2x}+16=0$**.**

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{x^2-4}+1$**. Ihr Schaubild ist K.**
Geben Sie die Asymptoten an.
Untersuchen Sie K auf Symmetrie.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, r\in IR$**.**

Die Ebene E steht senkrecht auf die Geraden g und enthält den Punkt P$(-1|2|-4)$**.**

Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

Aufgabe 6

Gegeben sind die parallelen Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ **und F:** $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_2$**.**
Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man den Abstand zwischen den zwei Ebenen berechnet.

Aufgabe 7

Für eine Telefonumfrage, ruft ein Mitarbeiter eines Versandhauses zufällig 3 Kunden an.

a) Welche ist die Wahrscheinlichkeit dass diesen Mitarbeiter mindestens einmal ins Gespräch kommt?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er nur ein einziges Mal erfolgreich?

b) Welche ist die Wahrscheinlichkeit dass diesen Mitarbeiter nur einmal nicht ins Gespräch kommt?
Berechne die Wahrscheinlichkeit so dass der ersten und den letzten Anruf nicht erfolgreich sind.

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion *f* mit $f(x) = \frac{5}{x^3 - 8}$**.**

Lösung:

$$f(x) = \frac{5}{x^3 - 8} = 5 \cdot \left(x^3 - 8\right)^{-1}$$

$$f'(x) = 5 \cdot (-1) \cdot \left(x^3 - 8\right)^{-2} \cdot 3x^2 = -\frac{15}{\left(x^3 - 8\right)^2}$$

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion *f* mit $f(x)=\frac{1}{2x^3}+\cos(3x)$ **an.**

Lösung:

$f(x)=\frac{1}{2}x^{-3}+\cos(3x)$.

$\underline{F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}x^{-2}+\frac{1}{3}\sin(3x)=-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{3}\cdot\sin(3x)}$.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x}-7e^{2x}+12=0$**.**

Lösung:

$e^{4x}-7e^{2x}+12=0$

Substitution: $e^{2x}=z$**.**

$$z^2-7z+12=0\Rightarrow z_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot12}}{2}=\frac{7\pm1}{2}\Rightarrow z_1=4\wedge z_2=3$$

Resubstitution: $e^{2x}=4\Rightarrow 2x=\ln 4\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ln 4=\ln\sqrt{4}=\ln 2$ **;**

$e^{2x}=3\Rightarrow 2x=\ln 3\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}=\ln\left(\sqrt{3}\right)$**.**

Lösungsmenge: $\underline{IL=\left\{\ln(2);\ln\left(\sqrt{3}\right)\right\}}$**.**

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{1}{x^2-4}+1$. Ihr Schaubild ist *K*.

Geben Sie die Asymptoten an.
Untersuchen Sie *K* auf Symmetrie.

Lösung:

Definitionsmenge:

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_1=-2 \wedge x_2=2$ $\Rightarrow$ ***ID = IR* \ {– 2; 2}.**

Bestimmung der Asymptoten:

Es gilt: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{1}{x^2-4}+1=-\infty$ **;** $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\frac{1}{x^2-4}+1=+\infty$

$\Rightarrow$ *x* = –2 ist eine Polstelle mit VZW von - nach + und die Gerade mit der Gleichung *x* = –2 ist eine senkrechte Asymptote für *K*.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{1}{x^2-4}+1=-\infty$ **;** $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{1}{x^2-4}+1=+\infty$

$\Rightarrow$ *x* = 2 ist eine Polstelle mit VZW von – nach + und die Gerade mit der Gleichung *x* = 2 ist eine senkrechte Asymptote für *K*.

Es gilt: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-4}+1=0+1=1$

$\Rightarrow$die Gerade mit der Gleichung y=1 ist eine waagerechte Asymptote für *K*.

Untersuchung auf Symmetrie:

Es gilt: $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2-4}+1=\frac{1}{x^2-4}+1=f(x)$

$\Rightarrow$ *K* ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, r\in IR$**.**

Die Ebene E steht senkrecht auf die Geraden g und enthält den Punkt P$(-1|2|-4)$.

Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

Lösung:

Bestimmung der Koordinatengleichung von E:

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ **der Geraden g ist ein Normalenvektor für die Ebene E.**

$\Rightarrow\ x_1+2x_2+x_3=d$

Punkt P einsetzen:

$-1+2\cdot 2-4=d\Rightarrow d=-1$

E: $x_1+2x_2+x_3=-1$

Bestimmung von zwei weiteren Punkte aus E:

$1+2\cdot(-1)+0=-1\ \Rightarrow$ **Q** $(1|-1|0)$

$1+2\cdot 0+(-2)=-1\ \Rightarrow$ **R** $(1|0|-2)$

Bestimmung der Parametergleichung von E:

E: $\vec{x}=\overrightarrow{OP}+r\cdot\overrightarrow{PQ}+s\cdot\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$**;** $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$**;** $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ **E:** $\underline{\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}; r,s\in IR}$**.**

Aufgabe 6

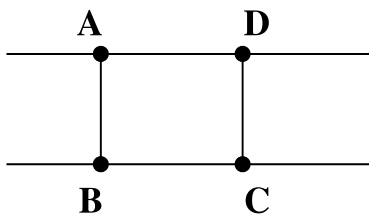
Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; r \in IR$.

Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Punkt $A(-2|1|3)$**.**
Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden h.
Die Punkte A und B auf h, C und D auf g sind die Eckpunkte eines Quadrates. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Quadrates.

Lösung:

Bestimmung einer Parametergleichung der Geraden h:

h: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Bestimmung des Punktes B ∈ h:

B ∈ h ist der Lotfußpunkt von A auf g.

Aufstellung einer Hilfsebene H durch A und orthogonal auf g:

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = b$

$-1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = b \Rightarrow b = 11$

F: $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11$

Bestimmung des Schnittpunktes B von H und g:

$-(-1-r) + 3 \cdot 3r + 2 \cdot (-2+2r) = 11 \Leftrightarrow -3 + 14r = 11 \Rightarrow r = 1$

$\vec{x} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\underline{\mathbf{B}(-2|3|0)}$.

Berechnung des Lotvektors $\overrightarrow{AB}$**:**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Flächeninhalts:

$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \underline{A = \left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13}$.

Aufgabe 7

Für eine Telefonumfrage, ruft ein Mitarbeiter eines Versandhauses zufällig 3 Kunden an.

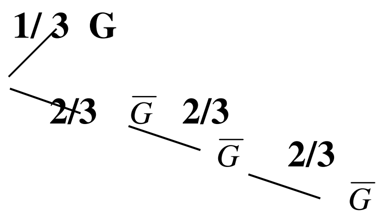
a) Welche ist die Wahrscheinlichkeit dass diesen Mitarbeiter mindestens einmal ins Gespräch kommt?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er nur ein einziges Mal erfolgreich?

b) Welche ist die Wahrscheinlichkeit dass diesen Mitarbeiter nur einmal nicht ins Gespräch kommt?
Berechne die Wahrscheinlichkeit so dass der ersten und den letzten Anruf nicht erfolgreich sind.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit dass der Mitarbeiter in Gespräch kommt beträgt:
$p_1 = \frac{1}{3}$.

***A*: „Der Mitarbeiter kommt mindestens einmal im Gespräch"**
$\overline{A}$ **:" Der Mitarbeiter kommt überhaupt nicht ins Gespräch"**
$P(A) = 1 - P(\overline{A})$



$$P(\overline{A}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow P(A) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}.$$

***B*: „Der Mitarbeiter kommt nur ein einziges Mal ins Gespräch"**

$$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$= 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

C:„der Mitarbeiter kommt nur einmal nicht ins Gespräch"

$$P(C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$$
$$=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}.$$

D: „Der ersten und den letzten Anruf sind nicht erfolgreich „

$$P(D)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$
$$=\frac{4}{27}+\frac{8}{27}=\frac{4}{9}.$$