Pflichtteil 6 (ABG_BW)

Aufgabe 1

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\sin^2(x)\right)^3$.

Aufgabe 2

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2x-1}+4\cdot\cos(2x-1)$ an.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung: $e^{1-2x}+e^{-x}=\frac{2}{e}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}+2x$. Ihr Schaubild sei K.

In welchen Punkten hat K Tangenten, die orthogonal zur Geraden $y=\frac{1}{2}x-3$ verlaufen?
Geben Sie die Gleichung einer der Tangenten an.

Aufgabe 5

Die Bilder 1, 2 und 3 zeigen die Schaubilder der Funktion g, ihrer Ableitungsfunktion g' und einer Stammfunktion G von g.
Ordnen Sie g, g' und G dem passenden Bild zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

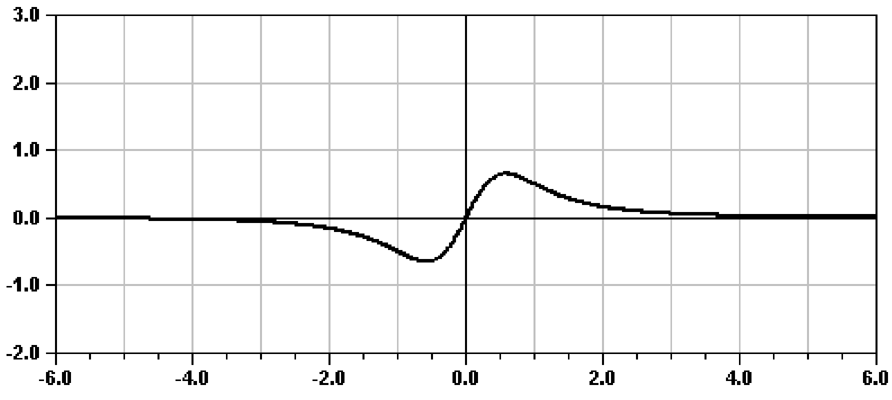


Bild 1

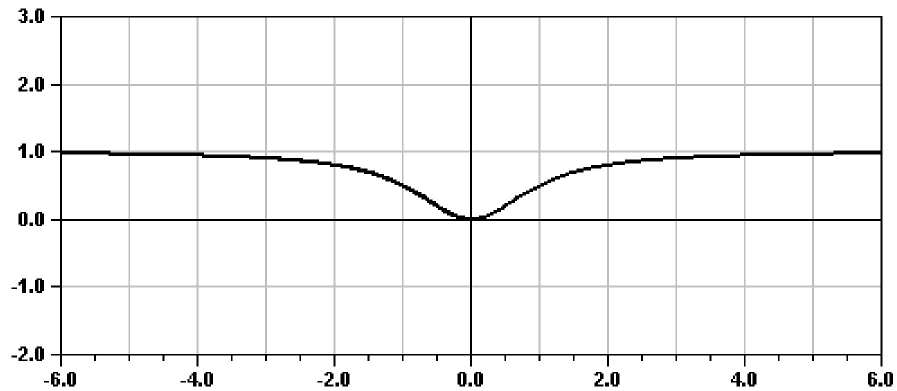


Bild 2

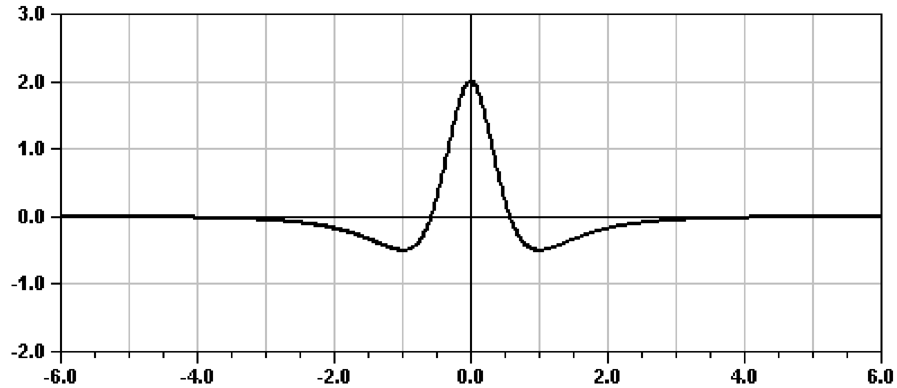


Bild 3

Aufgabe 6

Die Punkte A $(1|2|3)$ und B $(5|-2|1)$ liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene E.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung von E auf.

Aufgabe 7

Eine Schachtel enthält vier gelbe und einen roter Chip.
Für ein Spiel gelten folgende Regeln: Es wird jeweils einen Chip herausgezogen.
Die roten Chips werden zurückgelegt, die gelben nicht.
Nach einem Einsatz von 1€ darf der Spieler zweimal Ziehen.
Der Spieler erhält:
- 5€ für zwei gezogenen roten Chips;
- 2€ für ein gezogener roten Chips.

Ist das Spiel fair?

Lösung:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(1+\sin^2(x)\right)^3$.
Gesucht ist die Ableitungsfunktion von f.

Regeln:

$$\boxed{f(x)=x^n \quad\rightarrow\quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}}$$

$$\boxed{f(x)=\sin(x) \;\rightarrow\; f'(x)=\cos(x)}$$

$$\boxed{f(x)=u(v(x)) \quad\rightarrow\quad f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Ableitung:

$$f'(x)=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot\left(1+\sin(x)\right)^2\cdot 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\left(1+\sin(x)\right)^2.$$

$$\underline{f'(x)=\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\left(1+\sin(x)\right)^2}.$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $\underline{f(x)=\frac{1}{2x-1}+4\cdot\cos(2x-1)}$.

Regeln:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{ax+b} \quad\rightarrow\quad F(x)=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C}$$

$$\boxed{f(x)=\cos(ax+b) \quad\rightarrow\quad F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C}$$

Stammfunktion:

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln|2x-1|+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x-1)=\frac{1}{2}\cdot\ln|2x-1|+2\cdot\sin(2x-1).$$

$$\underline{F(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln|2x-1|+2\cdot\sin(2x-1)}.$$

Aufgabe 3

Die Gleichung $\underline{e^{1-2x} + e^{-x} = \frac{2}{e}}$ ist eine Exponentialgleichung.

Umformung:

$$e^{1-2x} + e^{-x} = \frac{2}{e} \Big| \cdot e \Leftrightarrow e^{2-2x} + e^{1-x} = 2 \Leftrightarrow e^{2(1-x)} + e^{1-x} = 2$$

$$e^{2(1-x)} + e^{1-x} - 2 = 0$$

Durch die **Substitution** $e^{1-x} = z$ wird die Gleichung in eine quadratische Gleichung überführt:

$$z^2 + z - 2 = 0$$

Allgemeine Form: $az^2 + bz + c = 0$. $\qquad z^2 + z - 2 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Normalform: $z^2 + pz + q = 0$. $\qquad z^2 + z - 2 = 0$

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = -2 \wedge z_2 = 1.$$

Rücksubstitution:

1. $e^{1-x} = -2$.

Die Gleichung hat keine Lösung, da $e^{1-x} > 0$ für alle $x \in IR$ gilt

$$\Rightarrow \underline{IL_1 = \{\ \}}.$$

2. $e^{1-x} = 1$.

Durch logarithmieren erreicht man: $\ln(e^{1-x}) = \ln 1 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\Rightarrow \underline{IL_2 = \{1\}}.$$

Lösungsmenge:

$$\underline{IL = IL_1 \cup IL_2 = \{1\}}.$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\frac{1}{x}+2x$. Ihr Schaubild sei K.

Gesucht sind die Punkte auf K mit Tangenten, die orthogonal zur Geraden $y=\frac{1}{2}x-3$ sind. Die Gleichung einer der Tangenten ist anzugeben.

Steigung der Tangenten:

$$m_t=-\frac{1}{m_n}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2.$$

Ableitung:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+2$$

Bestimmung der Berührpunkte:

$$f'(x)=-2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}+2=-2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}=-4 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}$$

Wurzelziehen: **1.** $x_1=\frac{1}{2}$;

2. $x_2=-\frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}+2\cdot\frac{1}{2}=2+1=3 \Rightarrow \underline{B_1\left(\frac{1}{2}\middle|3\right)}.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{-\frac{1}{2}}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2-1=-3 \Rightarrow \underline{B_2\left(-\frac{1}{2}\middle|-3\right)}.$$

Bestimmung der Tangentengleichung:

Für die Stelle $x_0=-\frac{1}{2}$ gilt:

$$(t_1): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Es gilt: $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$.

$$\Rightarrow y=-2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)-3=-2x-2\cdot\frac{1}{2}-3=-2x-4$$

$$\Rightarrow (t_1): \underline{y=-2x-4}.$$

Aufgabe 5

Es gilt:

g'		Nullstelle mit VZW	Extremstelle
g	Nullstelle mit VZW	Extremstelle	Wendestelle
G	Extremstelle	Wendestelle	

Zuordnung:

	Nullstellen	Extremstellen	Wendestellen	Funktion
Bild 1	**0**	**–0,5; 0,5**	**–1; 0; 1**	***g***
Bild 2	0	**0**	**–0,5; 0,5**	***G***
Bild 3	**–0,5; 0,5**	**–1; 0; 1**	–1,5; –0,25; 0,25;1,5	g'

Begründung:

Das Schaubild aus Bild 3 (von g') hat an den Stellen $x_1 \approx -0{,}5$ und $x_2 \approx 0{,}5$ Nullstellen mit Vorzeichenwechsel (VZW).

Das Schaubild aus Bild 1 (von g) hat an diesen Stellen Extrempunkte.

Das Schaubild aus Bild 2 (von G) hat an denselben Stellen Wendepunkte.

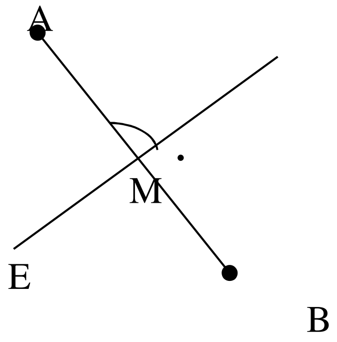
Das Schaubild aus Bild 3 (von g') hat an den Stellen $x_3 = -1$, $x_4 = 0$ und $x_5 = 1$ Extremstellen.

Das Schaubild aus Bild 1 (von g) hat an denselben Stellen Wendepunkte.

Das Schaubild aus Bild 1 (von $g = G'$) hat an den Stellen $x_4 = 0$ eine Nullstelle mit VZW von – nach +.
Das Schaubild aus Bild 2 (von G) hat an derselben Stelle einen Tiefpunkt.

Aufgabe 6

Die Punkte A $(1|2|3)$ und B $(5|-2|1)$ liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene E.
Gesucht ist eine Koordinatengleichung von E.



Die Ebene E enthält den Punkt M und $\overrightarrow{AB}$ ist ein Normalenvektor für E.

Bestimmung des Mittelpunktes M der Strecke AB:

$$M\left(\frac{1+5}{2}\middle|\frac{2-2}{2}\middle|\frac{3+1}{2}\right) \Leftrightarrow M\,(3|0|2).$$

Bestimmung des Vektors $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = d$$

$4 \cdot 3 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = d$ (Punkt M eingesetzt)

$\Rightarrow d = 8$

$\Rightarrow$ E: $4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8$ (geteilt durch 2)

$\Rightarrow$ E: $\underline{2x_1 - 2x_2 - x_3 = 4.}$

Aufgabe 7

Eine Schachtel enthält vier gelben und einen roten Chip.
Es wird zweimal gezogen. Die roten Chips werden zurückgelegt.

Ereignis A: „Beide gezogenen Chips sind rot".

Da der rote Chip zurückgelegt wird, ist die Wahrscheinlichkeit für die beiden gezogenen Chips $\frac{1}{5}$.

Es gilt, also: $P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$.

Ereignis B: „Ein gezogener Chips ist rot".

Es wird entweder einen roten und dann einen gelben Chip, oder einen gelben und dann einen roten Chip gezogen.

Es gilt, also:

$$P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{25}+\frac{1}{5}=\frac{4}{25}+\frac{5}{25}=\frac{9}{25}.$$

Ereignis C: „Kein gezogener Chip ist rot".

Da die Gelben Chips nicht zurückgelegt werden, gilt:

$$P(C)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.$$

Die Zufallsvariable X steht für den Auszahlungsbetrag des Spielers.

Der Erwartungswert der Zufallsvariable X ist:

$$E(X)=5\cdot\frac{1}{25}+2\cdot\frac{9}{25}+0\cdot\frac{3}{5}=\frac{5}{25}+\frac{18}{25}=\frac{4}{25}=\frac{23}{25}<1.$$

Da der Auszahlungsbetrag kleiner als der Einsatz ist, ist das Spiel nicht fair.