Vorbereitung für das Abitur

Baden-Württemberg

Analysis und Algebra

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion *f* mit $f(x) = \left(x + e^{-2x^2}\right)^3$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_e^{2e} \left(\frac{3}{2x - e} - \frac{1}{2x} \right) dx$.

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $x^2 + \frac{3}{x^2} = 4$.

Aufgabe 4

Das Schaubild einer Funktion *f* ist eine Parabel vierter Ordnung, die im Ursprung einen Sattelpunkt besitzt und die *x*-Achse an der Stelle $x = -4$ **schneidet.**
In dieser Nullstelle hat die Tangente an *K* die Steigung 2.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Parabel.

Aufgabe 5

Ein Handyhersteller bringt ein neues Produkt auf den Markt.
Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit $g(x) = 12150 - 12150 \cdot e^{-0,5x}$ **beschreiben.**
Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Handyhersteller langfristig rechnen?

Aufgabe 1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion *f* mit $f(x)=\left(x+e^{-2x^2}\right)^3$**.**

Lösung:

Regeln:

$\boxed{f(x)=u(v(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)}$

$\boxed{f(x)=e^{ax+b} \quad \rightarrow \quad f'(x)=a\cdot e^{ax+b}}$

Ableitung:

$$f'(x)=3\cdot\left(x+e^{-2x^2}\right)^2\cdot\left(1+e^{-2x^2}\cdot(-4x)\right)=3\cdot\left(x+e^{-2x^2}\right)^2\cdot\left(1-4x\cdot e^{-2x^2}\right).$$

$$\underline{f'(x)=3\cdot\left(x+e^{-2x^2}\right)^2\cdot\left(1-4x\cdot e^{-2x^2}\right)}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral $\int_e^{2e}\left(\frac{3}{2x-e}-\frac{1}{2x}\right)dx$**.**

Lösung:

$$\int_e^{2e}\left(\frac{3}{2x-e}-\frac{1}{2x}\right)dx=\left[3\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln|2x-e|-\frac{1}{2}\cdot\ln|x|\right]_e^{2e}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln|3e|-\frac{1}{2}\cdot\ln|2e|-\frac{3}{2}\cdot\ln|e|+\frac{1}{2}\cdot\ln|e|$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln(3e)-\frac{1}{2}\cdot\ln(2e)-\frac{3}{2}\cdot\ln(e)+\frac{1}{2}\cdot\ln(e)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln(3)+\frac{3}{2}\cdot\ln(e)-\frac{1}{2}\cdot\ln(2)-\frac{1}{2}\cdot\ln(e)-\frac{3}{2}\cdot\ln(e)+\frac{1}{2}\cdot\ln(e)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\ln(3)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln(2)-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\ln(3)-\frac{1}{2}\cdot\ln(2).$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung $x^2 + \frac{3}{x^2} = 4$**.**

Lösung:

Definitionsmenge bestimmen:

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow ID = IR \setminus \{0\}$.

Hauptnenner ermitteln:

$HN : x^2$.

Die Gleichung mit dem Hauptnenner „durchmultiplizieren“:

$$x^2 + \frac{3}{x^2} = 4 \,\Big|\cdot x^2 \Rightarrow x^4 + 3 = 4x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

Lösen der „bruchfreie“ biquadratische Gleichung:

Substitution: $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 4z + 3 = 0$

Die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 3 = 0$ **lösen:**

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

Normalform: $x^2 + px + q = 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} = 2 \pm 1$$

$\Rightarrow z_1 = 1$ **und** $z_2 = 3$.

Rücksubstitution:

$x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 1$;

$x^2 = 3 \Rightarrow x_3 = -\sqrt{3} \wedge x_4 = \sqrt{3}$.

Überprüfen ob die Lösengen zur Definitionsmenge gehören:

Alle Lösungen erfüllen die Ausgangsgleichung.

Lösungsmenge: $IL = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$.

Aufgabe 4

Das Schaubild einer Funktion f ist eine Parabel vierter Ordnung, die im Ursprung einen Sattelpunkt besitzt und die x-Achse an der Stelle $x=-4$ schneidet.
In dieser Nullstelle hat die Tangente an K die Steigung 2.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Parabel.

Lösung:

Es gilt:

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$
$$f'(x)=4ax^3+3bx^2+cx+d$$
$$f''(x)=12ax^2+6bx+c$$

Aus der Aussage „Der Ursprung ist ein Sattelpunkt" folgt:
$f(0)=0$; $f'(0)=0$ **und** $f''(0)=0$.

Aus der Aussage „Das Schaubild von f schneidet die x-Achse in $x=-4$" folgt:
$f(-4)=0$.

Aus der Aussage „In dieser Nullstelle hat die Tangente an K die Steigung 2" folgt:
$f'(-4)=2$.

Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \\ f''(0)=0 \\ f(-4)=0 \\ f'(-4)=2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} e=0 \\ d=0 \\ c=0 \\ 256a-64b+16c-4d+e=0 \\ -256a+48b-4c+d=2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 256a-64b=0 \\ -256a+48b=2 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 256a-64b=0 \\ -16b=2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 256a-64b=0 \\ b=-\frac{1}{8} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 256a+8=0 \\ b=-\frac{1}{8} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{32} \\ b=-\frac{1}{8} \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{8}x^3.$$

Aufgabe 5

**Ein Handyhersteller bringt ein neues Produkt auf den Markt.
Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit** $g(x) = 12150 - 12150 \cdot e^{-0,5x}$ **beschreiben.
Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Handyhersteller langfristig rechnen?**

Lösung:

Die Funktion *g* mit $g(x) = 12150 - 12150 \cdot e^{-0,5x}$ **beschreibt die wöchentlichen Verkaufszahlen eines Supermarkts.**

Grenzwert für $x \to \infty$**:**

$\lim\limits_{x \to \infty}(12150 - 12150 \cdot e^{-0,5x}) = 12150 - 12150 \cdot 0 = 12150$**.**

$\Rightarrow$ **Der Handyhersteller kann langfristig mit wöchentlichen Verkaufszahlen von 12150 Stückzahl rechnen.**