Vorbereitung für das Abitur

Baden-Württemberg

Analytische Geometrie

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene E: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$**.**
Geben Sie eine Gleichung einer zu E parallelen Ebene F im Abstand $\sqrt{14}$ **an.**

Aufgabe 2

Die Punkte A (3|0|1) und B (2|−2|0) liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene E.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung von E auf.

Aufgabe 3

Der Punkt P (3|−2|0) wird an der Ebene E: $x_1 - 2x_3 = 5$ **gespiegelt.**
Bestimmen Sie den Spiegelpunkt P*.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene E: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$.
Geben Sie eine Gleichung einer zu E parallelen Ebene F im Abstand $\sqrt{14}$ **an.**

Lösung:

Eine zur E parallele Ebene F hat die Gleichung

F: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b$.
Der Abstand zwischen den zwei parallelen Ebenen ist gleich dem Abstand von einem Punkt $A \in E$ **zur Ebene F.**

Der Punkt ist zum Beispiel A (0|–1|1), da $0 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 5$ **gilt.**

Umwandlung von F in die Hesse` sche Normalenform:

$$\frac{x_1 - 2x_2 + 3x_3 - b}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = 0.$$

Abstand *d* (A;F):

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 - b|}{\sqrt{14}} = \frac{|5 - b|}{\sqrt{14}}.$$

Bestimmung einer Koordinatengleichung für die Ebene F:

$$d = \sqrt{14} \Leftrightarrow \frac{|5 - b|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$\Leftrightarrow |5 - b| = 14 \Leftrightarrow 5 - b = \pm 14$$
$$\Rightarrow b_1 = 19 \wedge b_2 = -9$$

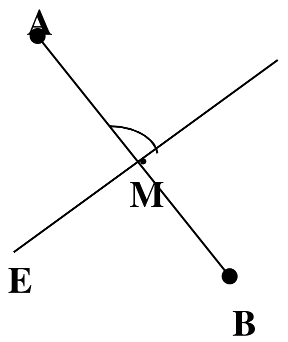
Für $b_1 = 19$ **folgt**

F: $\underline{x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 19}$.

Aufgabe 2

Die Punkte A (3|0|1) und B (2|−2|0) liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene E.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung von E auf.

Lösung:



Die Ebene E enthält den Punkt M und $\overrightarrow{AB}$ ist ein Normalenvektor für E.

Bestimmung des Mittelpunktes M der Strecke AB:

$$\mathbf{M}\left(\frac{3+2}{2}\middle|\frac{0-2}{2}\middle|\frac{1+0}{2}\right) \Leftrightarrow \mathbf{M\ (2{,}5\,|\,-1\,|\,0{,}5).}$$

Bestimmung des Vektors $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 - 2x_2 - x_3 = d$$

$-2{,}5 - 2 \cdot (-1) - 0{,}5 = d$ **(Punkt M eingesetzt)**

$\Rightarrow$ ***d* = -1** $\Rightarrow$ **E:** $-x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$ **(geteilt durch (-1))**

$\Rightarrow$ **E:** $\underline{x_1 + 2x_2 + x_3 = 1.}$

Aufgabe 3

Der Punkt P (3|−2|0) wird an der Ebene E: $x_1 - 2x_3 = 5$ **gespiegelt.**
Bestimmen Sie den Spiegelpunkt P*.

Lösung:

Bestimmung der Geraden g durch P, orthogonal zu E:

g wird im P gestützt und hat den Normalenvektor $\vec{n}$ von E als Richtungsvektor.

$$\text{g: } \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung des Lotfußpunktes F:

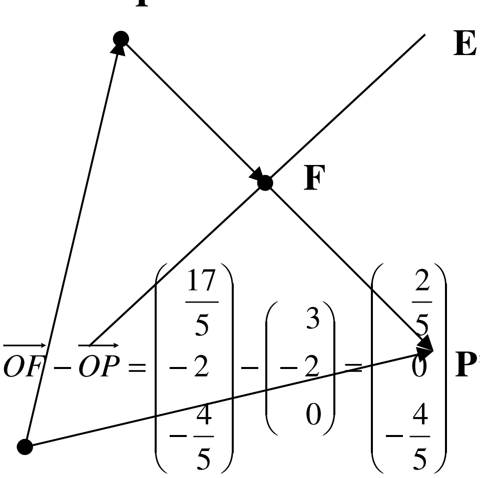
F ist der Schnittpunkt von g mit E.
Die Koordinaten von g werden in E eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ -2 \\ -2t \end{pmatrix} \Rightarrow 3 + t - 2 \cdot (-2t) = 5 \Leftrightarrow 3 + 5t = 5 \Rightarrow t = \frac{2}{5}.$$

$t = \frac{2}{5}$ **wird in g eingesetzt:** $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -2 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\frac{17}{5} \middle| -2 \middle| -\frac{4}{5}\right).$

Bestimmung des Spiegelpunktes P*:

Graphische Addition:



$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} \quad (\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FP^*})$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -2 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ -2 \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P^*\left(\frac{19}{5} \middle| -2 \middle| -\frac{8}{5}\right).$$