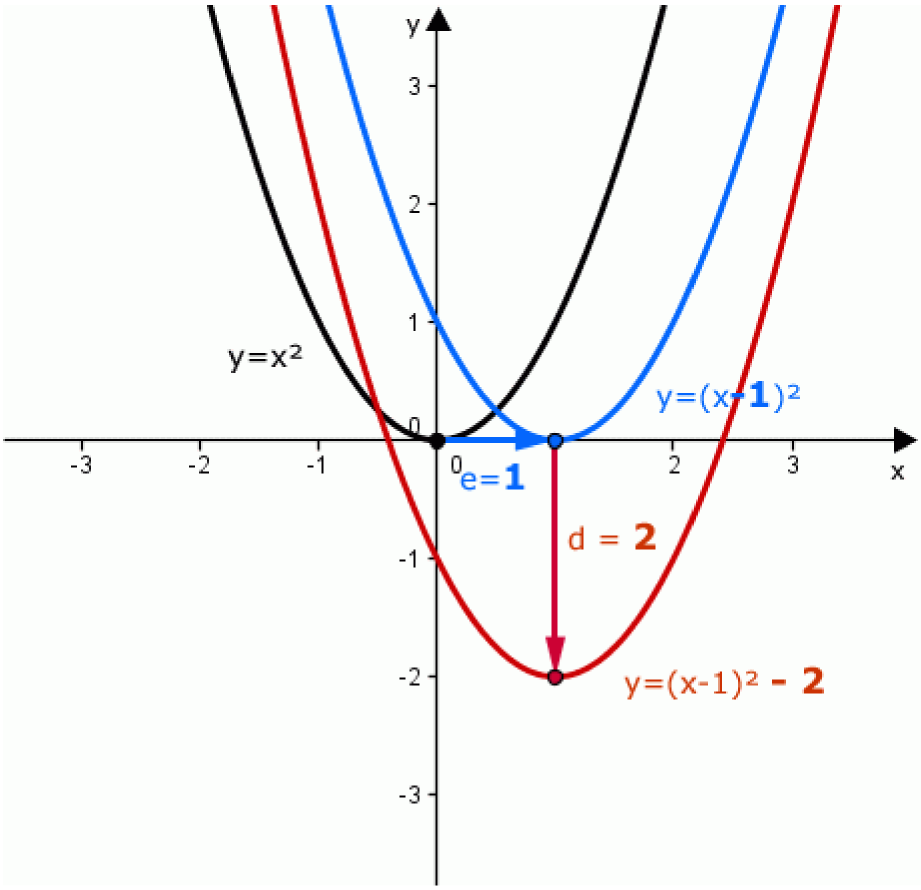
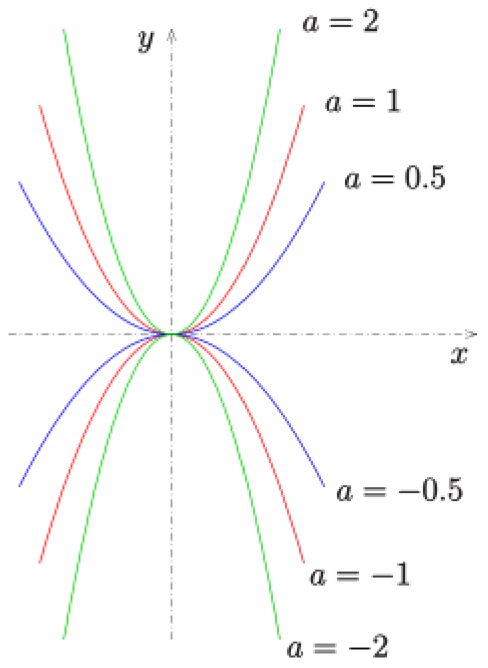
Verschieben von Parabeln



1.Spezielle quadratische Funktionen und Parabeln

Man nennt Funktionen mit Funktionsgleichungen der Form $y = a \cdot x^2, a \in R, a \neq 0$, z.B.: $y = 0.5x^2$, $y = -2x^2$ oder $y = \frac{2}{3}x^2$ auch spezielle quadratische Funktionen.

Der dazugehörige Graph heißt **Parabel**.



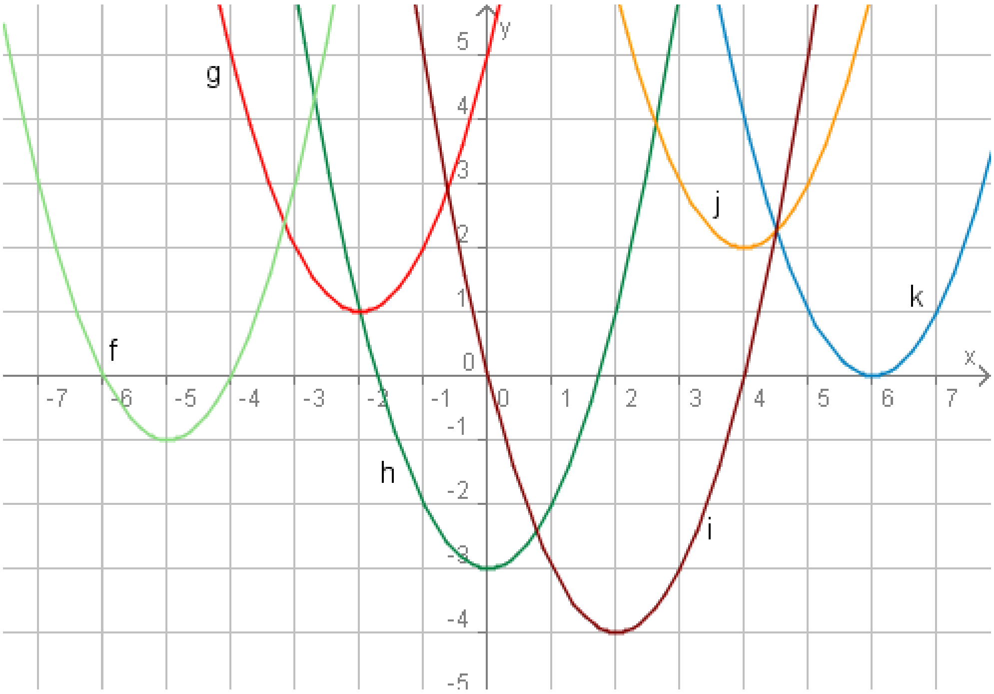
Für jede spezielle quadratische Funktion gilt $y(0) = 0$.
Die dazugehörige Parabel geht durch den Punkt $S(0|0)$, den Scheitelpunkt oder Scheitel der Parabel.

Er ist der höchste oder tiefste Punkt.

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.
Wenn $a = 1$ heißt der Graph der Funktion $y(x) = x^2$ Normalparabel.

2.Quadratische Funktionen und Parabeln

Wir betrachten jetzt quadratische Funktionen, bei denen die Scheitel der dazugehörenden Parabeln nicht im Ursprung liegen.



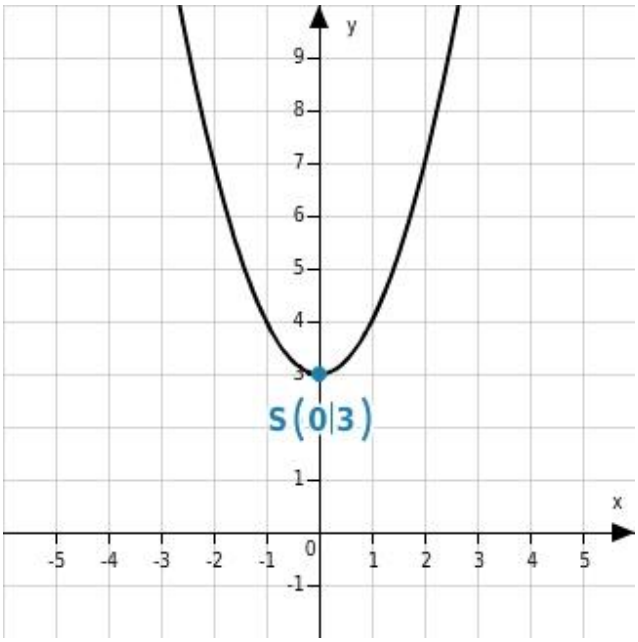
Diese entstehen aus den Graphen spezieller quadratischer Funktionen durch Verschiebung in x-Richtung, in y-Richtung, bzw. in x und in y-Richtung.

3.Verschieben einer Parabel in y-Richtung

3.1. Verschieben nach oben

Lautet die Funktionsgleichung $y = x^2 + 3$ so sind die Funktionswerte gegenüber der Funktion mit $y = x^2$ alle um **3** erhöht.

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$y = x^2$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**
	+3	**+3**	**+3**	**+3**	**+3**	**+3**	**+3**
$y = x^2 + 3$	**12**	**7**	**4**	**3**	**4**	**7**	**12**



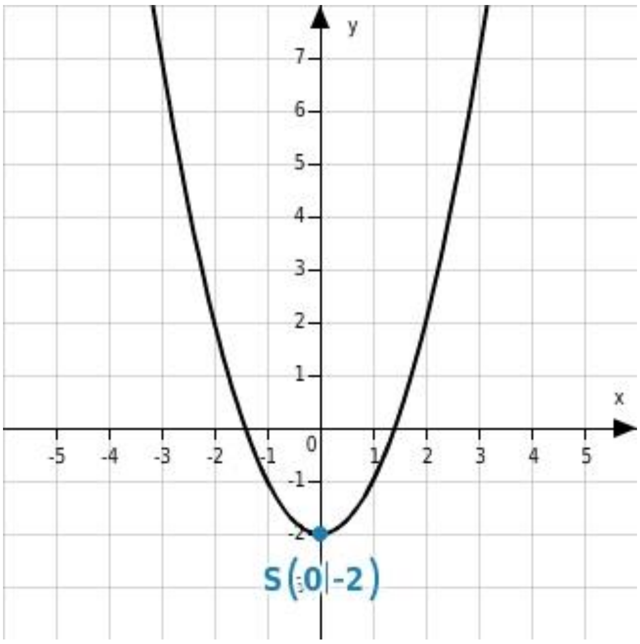
Als Graph für die Funktion mit $y = x^2 + 3$ erhält man eine Parabel, die um **3** **nach oben** verschoben ist.

Ihr Scheitelpunkt ist $S(0|3)$.

3.2. Verschieben nach unten

Lautet die Funktionsgleichung $y = x^2 - 2$ so sind die Funktionswerte gegenüber der Funktion mit $y = x^2$ alle um **2** erniedrigt.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**
	-2	**-2**	**-2**	**-2**	**-2**	**-2**	**-2**
$y = x^2 - 2$	**7**	**2**	**-1**	**-2**	**-1**	**2**	**7**



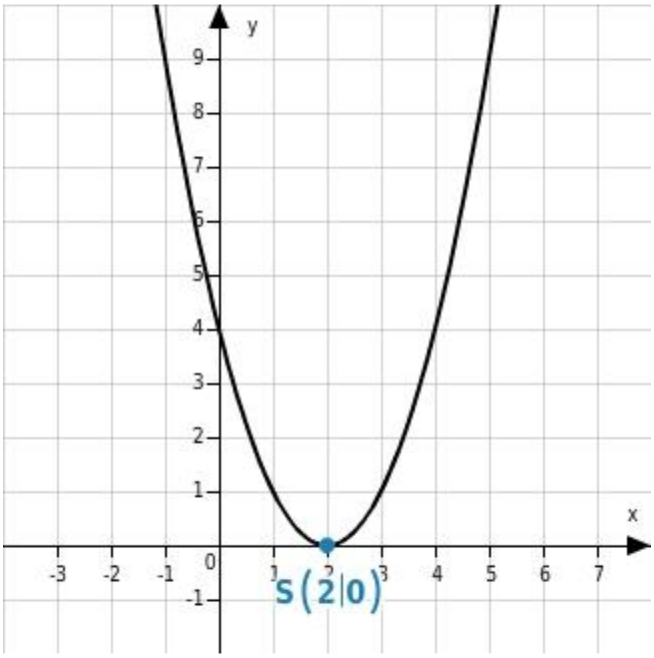
Als Graph für die Funktion mit $y = x^2 - 2$ erhält man eine Parabel, die um **2** **nach unten** verschoben ist.

Ihr Scheitelpunkt ist $S(0|-2)$.

4.Verschieben einer Parabel in x-Richtung

4.1. Verschieben nach rechts

Lautet die Funktionsgleichung $y=(x-2)^2$ so erniedrigt sich der x-Wert um 2.



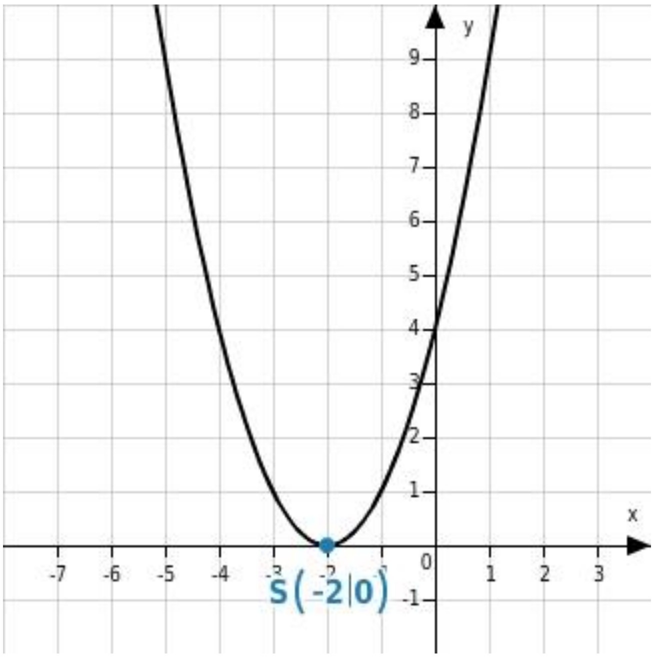
x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$y=x^2$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**
$y=(x-2)^2$	**25**	**16**	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**

Als Graph für die Funktion mit $y=(x-2)^2$ erhält man eine Parabel, die um **2** **nach rechts** verschoben ist.

Ihr Scheitelpunkt ist $S(2|0)$.

4.2. Verschieben nach links

Lautet die Funktionsgleichung $y=(x+2)^2$ so erhöht sich der x-Wert um 2.



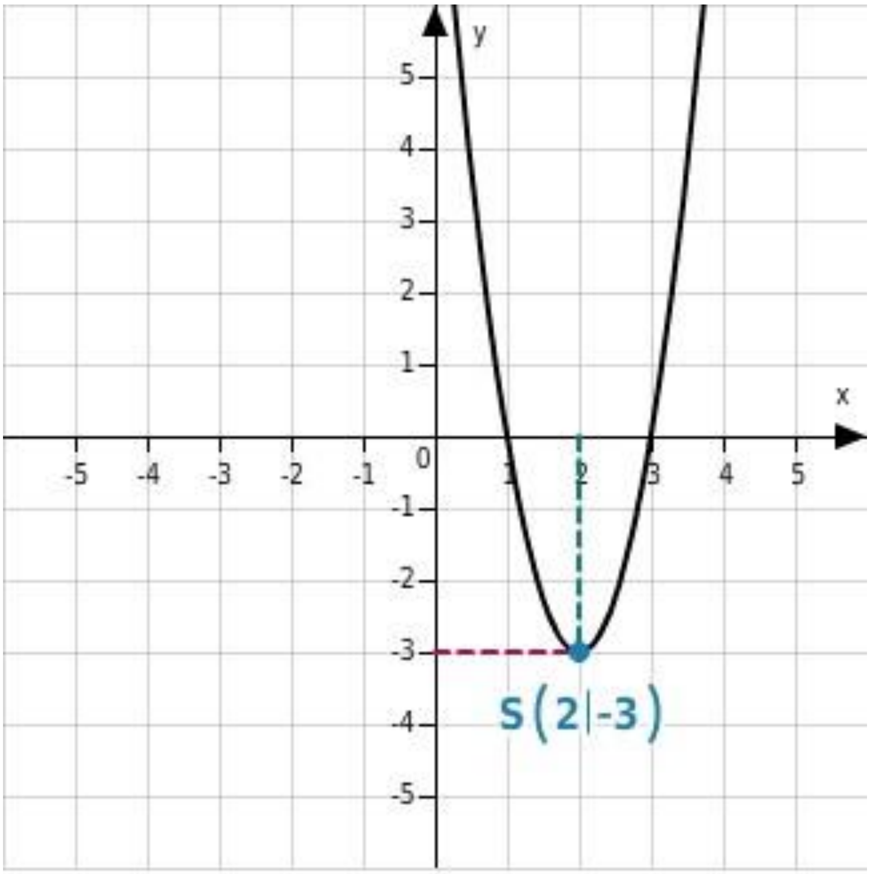
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**
$y=(x+2)^2$	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**

Als Graph für die Funktion mit $y=(x+2)^2$ erhält man eine Parabel, die um **2** **nach links** verschoben ist.

Ihr Scheitelpunkt ist $S(-2|0)$.

5.Verschieben einer Parabel in x und y-Richtung

Die Parabel der Funktion mit der Funktionsgleichung $y=3(x-2)^2-3$ ist gegenüber dem Graphen der speziellen quadratischen Funktion mit der Funktionsgleichung $y=3x^2$ um **2** nach rechts und um 3 nach unten verschoben; der Scheitel liegt bei S(2I-3).

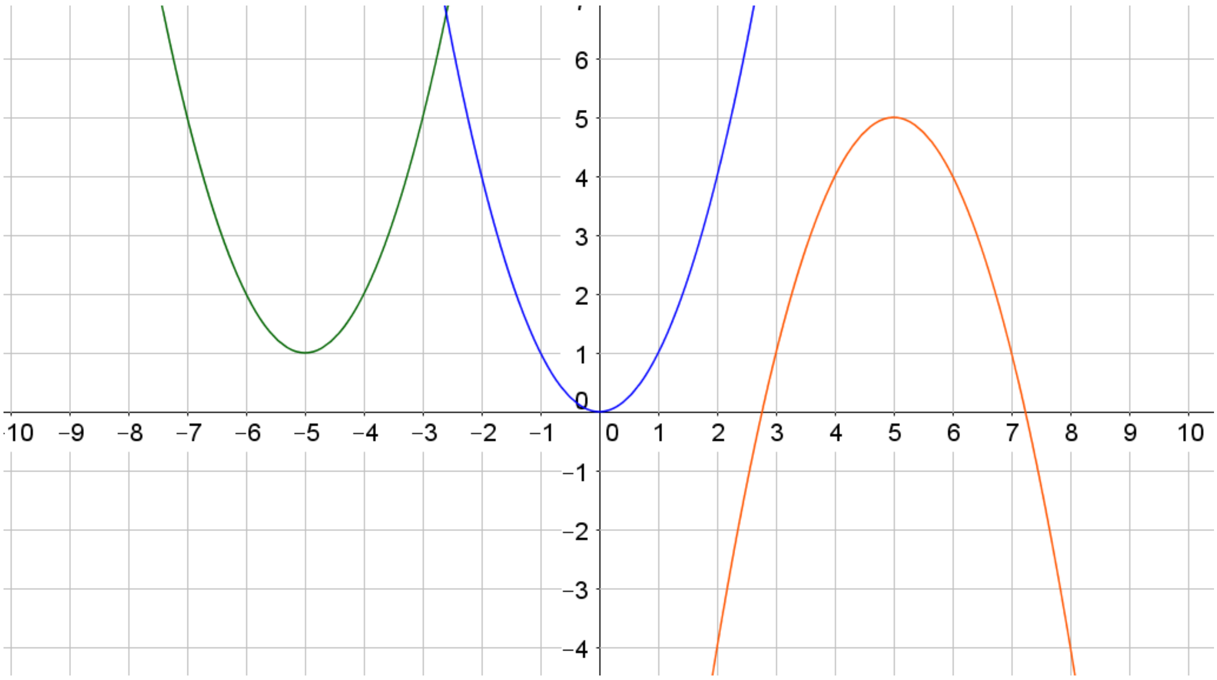


x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
$y=3x^2$	**27**	**12**	**3**	**0**	**3**	**12**	**27**
	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$y=3(x-2)^2$	**75**	**48**	**27**	**12**	**3**	**0**	**3**
	-3	**-3**	**-3**	**-3**	**-3**	**-3**	**-3**
$y=3(x-2)^2-3$	**72**	**45**	**24**	**9**	**0**	**-3**	**0**

Funktionen, die eine Funktionsgleichung der Form $y=3(x-2)^2-3$ haben, heißen **allgemeine quadratische Funktion oder quadratische Funktion**.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Die verschobene Parabel kann keine, eine oder zwei Schnittpunkte mit der x-Achse haben.



Die x-Werte dieser Schnittpunkte werden **Nullstellen** genannt

Die x-Koordinate des Scheitelpunktes befindet sich genau in der Mitte zwischen den Nullstellen.

6. Aufgaben

6.1. Gib die Funktionsgleichung der Funktion an, deren Graph eine Normalparabel ist, die

a) um 5 nach oben verschoben ist;

b) um 3 nach links verschoben ist;

c) um 2 nach unten und um 4 nach rechts verschoben ist.

6.2 Bestimme, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Gib die Koordinaten des Scheitels an. Bestimme den größten bzw. den kleinsten Wert, den die Funktion annehmen kann.

a) $y = 3x^2 + 6$; b) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2$; c) $y = -4(x+3)^2 - 4.75$; d) $y = \frac{2}{5}(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$.

6.3. Eine in y-Richtung verschobene Normalparabel geht durch den Punkt

a) $P(0|2)$; b) $P(1|4)$; c) $P(-1|3.5)$; d) $P\left(\frac{2}{3}|2\right)$.

Bestimme eine Funktionsgleichung.

6.4. Die Parabel $y = 3x^2$ wird verschoben. S ist der Scheitel der verschobenen Parabel. Bestimme ihre Funktionsgleichung.

a) $S(-2|2)$; b) $S(1|-5)$; c) $S(-1|43.5)$; d) $S\left(-\frac{2}{3}\middle|-\frac{27}{8}\right)$.

6.5. Bei einem Schuss kann die Flugbahn eines Balles durch eine Parabel beschrieben werden mit $y = -0{,}00625(x-20)^2 + 2.5$.

Hierbei entspricht x (in m) der horizontalen Entfernung vom Abschlusspunkt und y (in m) der Höhe des Balles.

a) Wie hoch ist der Ball nach einem Meter?

b) Nach welcher Strecke hat der Ball seine größte Höhe erreicht?
Wie hoch ist diese?

c) Ein 1,90 m großer Gegenspieler steht 10 Meter entfernt. Kann er den Ball köpfen?

d) Nach welcher Strecke hat der Ball eine Höhe von 2 m?

Lösungen:

6.1. a) $y = x^2 + 5$; b) $y = (x+3)^2$; c) $y = (x-4)^2 - 2$.

6.2.a) Die Parabel ist nach oben geöffnet. $S(0|6)$.

Der kleinste Funktionswert ist 6.

b) Die Parabel ist nach oben geöffnet. $S(2|0)$.

Der kleinste Funktionswert ist 0.

c) Die Parabel ist nach unten geöffnet. $S(-3|-4.75)$.

Der größte Funktionswert ist -4,75

d) Die Parabel ist nach oben geöffnet. $S\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{5}{4}\right)$.

Der kleinste Funktionswert ist $\frac{5}{4}$.

6.3 a) $y = x^2 + d$; $P(0|2)$

$y = x^2 + 2$;

b) $y = x^2 + d$; $P(1|4)$

$4 = 1^2 + d$

$d = 3$

$y = x^2 + 3$;

c) $y = x^2 + d$; $P(-1|3.5)$

$3.5 = (-1)^2 + d$

$d = 2.5$

$y = x^2 + 2.5$.

d) $y = x^2 + d$; $P\left(\frac{2}{3}\middle|2\right)$.

$2 = (\frac{2}{3})^2 + d$

$d = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$

$y = x^2 + \frac{14}{9}$.

6.4. a) $y = 3(x+2)^2 + 2$; b) $y = 3(x-1)^2 - 5$; c) $y = 3(x+1)^2 + 43.5$;

d) $y = 3(x+\frac{2}{3})^2 - \frac{27}{8}$.

6.5. $y = -0{,}00625(x-20)^2 + 2.5$.

x	0	1	5	10	20	29	40
y	0	0.24375	1.09375	1.875	2.5	1.99375	0

a)0,24 m hoch.

b) $S(20|2.5)$. Der Ball hat nach einer Strecke von 20 m seine größte Höhe erreicht.

Diese ist 2,5 m hoch.

c) Für x= 10 ist y=1,875<1,90.

Der Spieler kann den Ball köpfen.

d) Für x= 29 und x=11 ist y=1,99375. Der Ball hat nach ca. 11m und nach ca. 29 m eine Höhe von 2m.